目　　录

模块一　函数、极限与连续

1.1　函　　数

※ 基础知识

一、函数定义

数集 D 到实数集 $\mathbf{R}$ 上的映射 f 称为定义在 D 上的函数，记为 $y=f(x)$，$x\in D$，D 称为定义域，称集合 $R_f=\{y \mid y=f(x),\ x\in D\}$ 为函数 f 的值域.

二、函数性质

1. 有界性

设函数 $y=f(x)$ 在数集 I 上有定义，

（1）若存在一个数 M，使得对于任意的 $x\in I$，$f(x)\leqslant M$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 I 上有上界.

（2）若存在一个数 m，使得对于任意的 $x\in I$，$f(x)\geqslant m$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 I 上有下界.

（3）若存在一个正数 Z，使得对于任意的 $x\in I$，$|f(x)|\leqslant Z$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 I 上有界.

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若对于任意的 a，$b\in I$，$a<b$，有 $f(a)<f(b)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调递增；若对于任意的 a，$b\in I$，$a<b$，有 $f(a)>f(b)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调递减.

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 在数集 $(-a,\ a)$ 上有定义，若对于任意的 $x\in(-a,\ a)$，$f(-x)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为偶函数. 若对于任意的 $x\in(-a,\ a)$，$f(-x)=-f(x)$ 恒成立，则称

$f(x)$ 为奇函数.

4. 周期性

设函数$f(x)$是定义在数集D上的函数，若存在一个正数l，使得对于任意的$x \in D$有$(x+l) \in D$，且$f(x+l)=f(x)$恒成立，则称l为函数$y=f(x)$的周期.

三、运算公式

$f(x)$，$g(x)$是定义在数集D上的函数，则

（1）和(差)：$(f \pm g)(x)=f(x) \pm g(x)$，$x \in D$.

（2）积：$(f \cdot g)(x)=f(x)g(x)$，$x \in D$.

（3）商：$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，$x \in D \setminus \{x \mid g(x)=0\}$.

（4）复合：$y=f(u)$，$u=g(x)$，则称函数$y=f[g(x)]$为函数f与g构成的复合函数.

（5）反函数：设函数$y=f(x)$是定义在数集D上的函数，若$y=f(x)$为一一映射，则可定义数集R_f到数集D的函数f^{-1}满足：对于任意的$y \in R_f$，存在唯一的$x \in D$，使得$x=f^{-1}(y)$，其中x满足$y=f(x)$. 称函数$y=f^{-1}(x)$为$y=f(x)$的反函数.

※ 考研数学所涉及的函数

1. 基本初等函数

（1）幂函数：$y=x^{\alpha}$($\alpha \in \mathbf{R}$是常数)；

（2）指数函数：$y=a^{x}$($a>0$且$a \neq 1$)；

（3）对数函数：$y=\log_a x$($a>0$且$a \neq 1$)；

（4）正弦函数：$y=\sin x$；

（5）余弦函数：$y=\cos x$；

（6）正切函数：$y=\tan x$；

（7）反正弦函数：$y=\arcsin x$；

（8）反余弦函数：$y=\arccos x$；

（9）反正切函数：$y=\arctan x$.

2. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数称为初等函数.

3. 分段函数

函数在不同区间上的表达式不同. 例如：绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

4. 极限函数

函数表达式由极限给出. 例如：

$$f(x)=\lim_{n \to \infty} \frac{1-x}{1+x^{2}n}$$

5. 隐函数

由一个方程所确定的 y 与 x 的函数关系，称为隐函数．例如：

$$y - x = e^{(y-1)}$$

6. 参数方程所确定的函数

由一个参数方程所确定的 y 与 x 的函数关系．例如：

$$\begin{cases} x = \tan t \\ y = t + \cos t \end{cases}, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

7. 幂指数函数

$$y = u(x)^{v(x)}$$

8. 积分上限函数

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

9. 幂级数的和函数

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

※ 经典练习

练习 1：(2001 数二)$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$，则 $f\{f[f(x)]\} = ($　　$)$.

A. 0　　B. 1　　C. $\begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$　　D. $\begin{cases} 0, & |x| \leqslant 1 \\ 1, & |x| > 1 \end{cases}$

练习 2：已知函数 $f(x)$ 为奇函数，且当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f(x) = \sin x - \cos x + 2$，则当 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 时，$f(x) =$ ________.

1.2　极　　限

※ 基础知识

一、极限定义

(1) 数列极限($\varepsilon - N$ 定义)：$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \Leftrightarrow$ 对于任意的 $\varepsilon > 0$(无论 ε 多么小)，都存在

一个正整数 N，当 $n > N$ 时，$|x_n - a| < \varepsilon$.

（2）函数极限（$\varepsilon - \delta$ 定义）：$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对于任意的 $\varepsilon > 0$（无论 ε 多么小），都存在一个正数 δ，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$|f(x) - A| < \varepsilon$.

（3）函数极限（$\varepsilon - X$ 定义）：$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对于任意的 $\varepsilon > 0$（无论 ε 多么小），都存在一个正数 X，当 $|x| > X$ 时，$|f(x) - A| < \varepsilon$.

（4）函数左极限：$f(x_0^-) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对于任意的 $\varepsilon > 0$（无论 ε 多么小），都存在一个正数 δ，当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时，$|f(x) - A| < \varepsilon$.

（5）函数右极限：$f(x_0^+) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对于任意的 $\varepsilon > 0$（无论 ε 多么小），都存在一个正数 δ，当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时，$|f(x) - A| < \varepsilon$.

（6）无穷小：如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$（或 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$），则称函数 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的无穷小.

（7）无穷小的比较：设 $\alpha(x)$，$\beta(x)$ 为当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的无穷小，且

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = C \quad \text{或} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{\alpha}{\beta} = C$$

那么：

（1）若 $C = 0$，则称 α 为比 β 高阶的无穷小，记为 $\alpha = o(\beta)$；

（2）若 $C = \infty$，则称 α 为比 β 低阶的无穷小；

（3）若 $C = 1$，则称 α 与 β 为等价无穷小，记为 $\alpha \sim \beta$；

（4）若 $C \neq 0, 1, \infty$，则称 α 与 β 为同阶无穷小；

（5）若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta^k} = C \neq 0$ 或 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\alpha}{\beta^k} = C \neq 0$，则称 α 是 β 的 k 阶无穷小.

二、极限的性质

这里只给出 $x \to x_0$ 时函数极限的性质，需要指出的是“数列极限以及 $x \to \infty$ 时函数极限也有相同的性质.”

性质 1（唯一性）　如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，则极限唯一.

性质 2（局部有界性）　如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，则存在常数 $\delta > 0$，$M > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x)| \leqslant M$.

性质 3（局部保号性）　如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，且 $A > 0$（或 $A < 0$），则存在常数 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $f(x) > 0$（或 $f(x) < 0$）.

证明： 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A > 0$，则由函数极限的定义，对于 $\varepsilon = \dfrac{A}{2} > 0$，存在一个 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，故

$$f(x) > A - \varepsilon = A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} > 0$$

同理，若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A<0$，则由函数极限的定义，对于$\varepsilon=-\dfrac{A}{2}>0$，存在一个$\delta_1>0$，当$0<|x-x_0|<\delta_1$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$，故

$$f(x)<A+\varepsilon=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}<0$$

性质3′(局部保号性升级版)　如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\neq 0$，则存在常数$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)|>\dfrac{|A|}{2}$.

证明：因为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\neq 0$，则由函数极限的定义，对于$\varepsilon=\dfrac{|A|}{2}>0$，存在一个$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$，所以当$0<|x-x_0|<\delta$时，有

$$|f(x)|=|f(x)-A+A|\geqslant|A|-|f(x)-A|>|A|-\varepsilon=|A|-\frac{|A|}{2}=\frac{|A|}{2}$$

性质4(归并性质)　设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，数列$\{x_n\}$是函数$f(x)$定义域内任意一个收敛于$x_0$的数列，满足$x_n\neq x_0$，则对应的函数列$\{f(x_n)\}$存在极限，且$\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=A$.

证明：因为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则由函数极限的定义，对于任意的$\varepsilon>0$，存在一个$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$. 又因为$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x_0$，所以对于上面的$\delta>0$，存在一个整数$N>0$，当$n>N$时，有$|x_n-x_0|<\delta$.

再由$x_n\neq x_0$，得$|x_n-x_0|>0$，所以当$n>N$时，$0<|x_n-x_0|<\delta$，从而$|f(x_n)-A|<\varepsilon$. 因此$\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=A$.

三、极限的运算公式

定理1.1　设$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=B$. 那么

(1) 和、差的极限：$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)\pm\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=A\pm B$.

(2) 积的极限：$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}[f(x)g(x)]=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=AB$.

(3) 商的极限：$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)}{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)}=\dfrac{A}{B}\,(B\neq 0)$.

(4) 幂指数函数的极限：$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)^{g(x)}=\left[\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)\right]^{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)}=A^B\,(A>0)$.

1. 复合函数极限运算法则

若$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，$u=g(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，且存在$\delta>0$，使得对任意的$x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$，$g(x)\neq u_0$恒成立.

2. 函数极限与无穷小的关系

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 当且仅当 $f(x)=A+\alpha(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

※ 考研极限题型

题型 1 抓大头：当 $x\to+\infty$ 时，$\log_a x \ll x^{\mu} \ll a^x \ll x^x$（“$\ll$”表示远小于），其中 $a>1$，$\mu>0$. 当 $n\to+\infty$ 时，$\log_a n \ll n^{\mu} \ll a^n \ll n! \ll n^n$.

例 1 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+2^x+\cos x^x}{2e^x+x^{100}+\ln x}$.

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+2^x+\cos x^x}{2e^x+x^{100}+\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2e^x}=\dfrac{1}{2}$.

题型 2 等价无穷小型：应用等价无穷小公式求极限.

等价无穷小公式：当 $x\to0$ 时，有

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2\sim\sec x-1,\ (1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x$$

$$x\sim\sin x\sim\arcsin x\sim\tan x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$$

定理 1.2 设 α，α'，β，β' 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小，并且 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，则有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha'}{\beta'}$$

操作规则：极限函数中若某个因式可用等价无穷小代换，则直接代换. 若是和或差的形式，则不可代换，此时需要借助麦克劳林公式进行求解.

例 2 计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(e^x-1)(1-\cos x)}{\ln(1+x^3)}$.

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(e^x-1)(1-\cos x)}{\ln(1+x^3)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\times\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\dfrac{1}{2}$.

注：上面例题中求极限的函数包括三个部分：e^x-1，$1-\cos x$，$\ln(1+x^3)$. 每一个部分都是被求极限函数的因式，因此等价无穷小可以直接代换.

例 3 计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{x(\sec x-1)}$.

解：
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x(\sec x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{\left(x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\right)-x}{x\times\frac{1}{2}x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)}{\frac{1}{2}x^3}=-\frac{1}{3}$$

注：上面例题中求极限的函数中式子 $\sec x-1$，$\sin x$ 有对应的等价无穷小量，但是由

于 $\sin x$ 部分是差的形式，因此这一部分不能直接代换成等价无穷小 x，而是采用将 $\sin x$ 展开到 x^3 项的麦克劳林公式. $\sec x - 1$ 是极限函数中的一个因式，因此可直接代换成等价无穷小 $\frac{1}{2}x^2$.

题型 3　麦克劳林公式型：应用麦克劳林公式求极限.

麦克劳林公式：

(1) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$，$n = 0, 1, 2, \cdots$；

(2) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$，$n = 0, 1, 2, \cdots$；

(3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$，$n = 0, 1, 2, \cdots$；

(4) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$，$n = 0, 1, 2, \cdots$；

(5) $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+1})$，$n = 0, 1, 2, \cdots$；

(6) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)} + o(x^{n+1})$，$n = 0, 1, 2, \cdots$；

(7) $\arcsin x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$；

(8) $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

操作规则：极限函数中若已知分母或分子是 ax^k（其中 a，k 是常数）的形式，则可将极限函数中的相应函数展开到 x^k 项的麦克劳林公式，此时极限便可轻易求解.

例 4　计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x - x}{\frac{1}{6}x^3}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x - x}{\frac{1}{6}x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right) - x}{\frac{1}{6}x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{6}x^3} = -2.$

题型 4　洛必达法则型：对于 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式可用下面洛必达法则求解极限.

定理 1.3　设 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x) = 0$（或 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x) = \infty$），$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x) = 0$（或 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x) = \infty$），$f(x)$，$g(x)$ 在 x_0 点的一个去心邻域内可导，且 $g'(x) \neq 0$，则有

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

例 5　计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x(\sec x - 1)}$.

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{x(\sec x-1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{x\cdot\dfrac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{\dfrac{1}{2}x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{\dfrac{3}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\dfrac{1}{2}x^2}{\dfrac{3}{2}x^2}=-\dfrac{1}{3}.$

例 6　（2015 数一）计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$.

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)}{2x}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=-\dfrac{1}{2}.$

注：下面 5 种形式的未定式可转换成$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式进行求解.

(1) $\infty-\infty$ 型.

例 7　计算 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right]$.

解：$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+x}}{2x}=\dfrac{1}{2}.$

(2) $0\cdot\infty$ 型.

例 8　计算 $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x$.

解：$\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}(-x)=0.$

(3) ∞^0 型.

例 9　计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}$.

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{1}}=e^0=1.$

(4) 0^0 型.

例 10　计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln(1+x)}}$.

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln(1+x)}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{\ln(1+x)-x}\ln\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^{\frac{\ln x}{x}}-1\right)}{\ln(1+x)}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{\ln x}{x}\right)}{\ln(1+x)}}$

$$=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{e^{\frac{\ln x}{x}}-1}\cdot e^{\frac{\ln x}{x}}\cdot\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}}{\frac{1}{1+x}}}=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{\ln x}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}}{\frac{1}{1+x}}}=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{\ln x}\cdot\frac{1+x}{x}}=e^{-1}$$

(5) 1^∞ 型：需要借助于第二个重要极限：$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

例 11　计算 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

解：$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[1+\dfrac{\ln(1+x)-x}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\left[1+\frac{\ln(1+x)-x}{x}\right]^{\frac{x}{\ln(1+x)-x}}\right\}^{\frac{\ln(1+x)-x}{x}\cdot\frac{1}{x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-x}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

注：1^∞ 型的未定式在考研极限题型中出现的频率较高，因此该题型的解法应给予重视.

题型 5 归并性质型：利用极限的归并性质，将一个函数列的极限问题转换成函数的极限问题，再利用相应的方法求解.

例 12 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right]$.

解：$$\lim_{n\to+\infty}n^2\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right]=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left[x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]-x}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

题型 6 定积分定义型：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(a\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1 f(ax)\,dx$.

注：从极限到定积分的变换步骤为

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\to\int_0^1$；

(2) $f\left(a\cdot\frac{i}{n}\right)\to f(ax)$ （即 $\frac{i}{n}\to x$）；

(3) $\frac{1}{n}\to dx$.

例 13 （2017 数一）计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)$.

解：$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{i}{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\right]\frac{1}{n}=\int_0^1 x\ln(1+x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+x)\,dx^2=\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\,d\ln(1+x)$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\frac{1}{1+x}dx=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2-1+1}{1+x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int_0^1\left[(x-1)+\frac{1}{1+x}\right]dx=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int_0^1(x-1)\,dx-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\ln(1+x)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)-\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{4}$$

注：此题中 $f\left(\frac{i}{n}\right)=\frac{i}{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\to f(x)=x\ln(1+x)$.

题型 7 夹逼定理型：此类型题的特点是：① 数列为分式连加的形式；② 根据已知条

件能得到数列的大小关系.

定理1.4 设数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$满足：①$b_n \leqslant a_n \leqslant c_n$，$\forall n$；②$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$. 则有$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

例14 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$.

解：因为

$$\frac{1}{2}=\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n}=\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n}=\frac{1}{n^2+n}+\frac{2}{n^2+n}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\leqslant$$

$$\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\leqslant\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\leqslant$$

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

并且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{2}$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)=\dfrac{1}{2}$.

例15 （2010数一）设数列$a_n=\int_0^1|\ln x|[\ln(1+x)]^n\mathrm{d}x$，$n=1,2,3,\cdots$. 计算$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

解：令$f(x)=x-\ln(1+x)$，$x\in[0,1]$，则$f(0)=0$.

因为当$x\in[0,1]$时，$f'(t)=1-\dfrac{1}{1+t}=\dfrac{t}{1+t}>0$，所以$f(x)$在$[0,1]$上单调递增.

因此当$x\in(0,1]$时，$f(x)>0$，即$\ln(1+x)<x$. 于是

$$\begin{aligned}a_n&=\int_0^1|\ln x|[\ln(1+x)]^n\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1|\ln x|x^n\mathrm{d}x=-\int_0^1x^n\ln x\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{n+1}\int_0^1\ln x\mathrm{d}x^{n+1}=-\frac{1}{n+1}(x^{n+1}\ln x)\Big|_0^1+\frac{1}{n+1}\int_0^1x^{n+1}\mathrm{d}\ln x\\&=\frac{1}{n+1}\int_0^1x^{n+1}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}\int_0^1x^n\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{(n+1)^2}.\end{aligned}$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n+1)^2}=0$，且$a_n\geqslant0$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

题型8 单调有界原理型：利用单调有界原理证明数列极限存在.

定理1.5（单调有界原理） 设数列$\{a_n\}$满足：①$a_{n+1}\leqslant a_n$，$\forall n$（或$a_{n+1}\geqslant a_n$，$\forall n$）；②存在常数$M>0$，使得$|a_n|\leqslant M$，$\forall n$. 那么数列$\{a_n\}$必有极限.

例16 设$a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)$，$n=2,3,4,\cdots$. 证明$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在，并求此极限.

证明：先证有界性（应用数学归纳法）：$a_1=2>1$（归纳奠基），假设当$n\leqslant k$时，$a_n>1$（归纳假设）成立，则当$n=k+1$时，有

$$a_{k+1}=\frac{1}{2}\left(a_k+\frac{1}{a_k}\right)>\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{a_k\cdot\frac{1}{a_k}}=1\text{（归纳证明）}.$$

因此，$a_n>1$，$\forall n$.

再证单调性：因为对于任意的 n，有

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)-a_n=\frac{1}{2a_n}-\frac{a_n}{2}=\frac{1-a_n^2}{2a_n}<0$$

所以，数列$\{a_n\}$单调递减，因此$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在．设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，在等式 $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)$ 两端令 $n\to\infty$ 取极限得

$$a=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$$

解得 $a=1$，$a=-1$（舍）．所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

注：此类题的分析方法为

（1）利用已知项先判断数列的单调性．如上题容易求得 $a_2=\frac{5}{4}$，于是 $a_2-a_1=\frac{5}{4}-2=-\frac{3}{4}<0$，所以可以猜想数列$\{a_n\}$单调递减．

（2）计算 $a_{n+1}-a_n$ 从中得出使（1）中得到的单调性成立的条件（通常为数列的上界或下界）．如上题 $a_{n+1}-a_n=\frac{1-a_n^2}{2a_n}$，因此要使数列单调递减，则必须 $a_n>1$（得到数列的下界）．

（3）用数学归纳法证明（2）中判断出来的数列有上界或有下界成立．

（4）要注意的是，分析过程是（1）～（3），但是答题时要先写（3），后写（2）．

※ 经典练习

练习 1：（1）计算 $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$；（2）计算 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x^2}}$.

练习 2：计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$.

练习 3：计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+1}+\frac{2\sin\frac{2\pi}{n}}{n^2+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{n\sin\pi}{n^2+\frac{1}{n}}\right)$.

练习 4：$a_1=10$，$a_n+1=\sqrt{6+a_n}$，$n=1,2,3,\cdots$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在，并求此极限．

1.3 连　　续

※ 基础知识

一、基本概念

1. 函数连续定义

设函数$f(x)$在点x_0的某一邻域内有定义，若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数$f(x)$在点$x_0$连续．若$f(x)$在集合$I$上每一点都是连续的，则称$f(x)$在集合$I$上连续．

2. 间断点定义

若函数$f(x)$在点x_0的某去心邻域内有定义，如果具有下列情形之一：①在$x=x_0$没有定义；②虽在$x=x_0$有定义，但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在；③虽在$x=x_0$有定义，但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\neq f(x_0)$，则称$x_0$为$f(x)$的间断点．

3. 间断点类型定义

设函数$f(x)$在点x_0的某个去心邻域内有定义，且x_0是$f(x)$的间断点，则

(1) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\neq f(x_0)$，则称$x_0$是$f(x)$的可去间断点．

(2) 若$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=B\neq A$，则称$x_0$是$f(x)$的跳跃间断点．

(3) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则称$x_0$是$f(x)$的无穷间断点．

(4) 若$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$都存在，则称$x_0$是$f(x)$的第一类间断点．

(5)(若$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$其中有一个不存在，则称$x_0$是$f(x)$的第二类间断点．

二、闭区间上连续函数的性质

性质1(最大值、最小值定理)　闭区间上的连续函数一定有界，且一定能取到最小值与最大值．

性质2(介值定理)　设$f(x)$在$[a, b]$上连续，常数m，M分别为函数$f(x)$在$[a, b]$上的最小值与最大值，数$C\in[m, M]$．则至少存在一点$\xi\in[a, b]$，使得$f(\xi)=C$.

三、连续函数的运算公式

定理1.6　设函数$f(x)$与$g(x)$在点x_0处连续，则

(1)$f(x)\pm g(x)$在点x_0处连续；

(2)$f(x)\cdot g(x)$ 在点 x_0 处连续；

(3) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$(当 $g(x_0)\neq 0$ 时) 在点 x_0 处连续.

定理 1.7　设函数 $y=f(u)$ 在 $u=u_0$ 处连续，而函数 $u=g(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续，且 $g(x_0)=u_0$，则复合函数 $y=f(g(x))$ 在点 x_0 处连续.

定理 1.8　设定义在区间 I_x 上的函数 $y=f(x)$ 在该区间上单调增加(或单调减少) 且连续，则它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 存在，并且在对应的区间 I_y 上单调增加(或单调减少) 且连续.

※ 经典练习

练习：设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，且 $T=\sum\limits_{i=1}^{n}t_i$，其中 $t_1>0$，$t_2>0$，…，$t_n>0$. 则在区间 $[x_1,x_n]$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=\dfrac{1}{T}[t_1f(x_1)+t_2f(x_2)+\cdots+t_nf(x_n)]$.

1.4　极限的应用

一、分段函数分段点处连续性的判断

先求分点处的左、右极限，然后判断左、右极限是否与该点处的函数值相等.

例 17　函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2(1-\cos x)}{x^2}, & x<0\\ 1, & x=0\\ \dfrac{2}{x\sin x}\displaystyle\int_0^x\ln(1+t)\,\mathrm{d}t, & x>0\end{cases}$，讨论函数 $f(x)$ 的连续性.

解：显然 $f(x)$ 在 $x<0$ 与 $x>0$ 的区域上连续. 又因为

$$f(0^-)=\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{2(1-\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to0^-}\frac{2\times\frac{1}{2}x^2}{x^2}=1=f(0)$$

$$f(0^+)=\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{2\int_0^x\ln(1+t)\,\mathrm{d}t}{x\sin x}=\lim_{x\to0^+}\frac{2\int_0^x\ln(1+t)\,\mathrm{d}t}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{2\ln(1+x)}{2x}=1=f(0)$$

所以函数在 $x=0$ 处也连续，于是函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

二、间断点类型的判断：利用间断点类型的定义判断间断点类型.

例 18 （2013 数二、三）函数 $f(x)=\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

解：容易看出函数 $f(x)$ 的间断点为 -1，0，1. 因为

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to-1}\frac{e^{x\ln|x|}-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim_{x\to-1}\frac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{1}{x+1}=\infty$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x+1}=1$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

所以 -1 为无穷间断点，而 0，1 为可去间断点，因此 C 为正确答案.

三、确定函数渐近线：利用渐近线的定义求函数渐近线.

（1）垂直渐近线：若 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=\infty$，则称直线 $x=c$ 为函数 $f(x)$ 的垂直渐近线.

（2）水平渐近线：若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，则称直线 $y=A$ 为函数 $f(x)$ 的水平渐近线.

（3）斜渐近线：若 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k\neq0$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b$，则称直线 $y=kx+b$ 为函数 $f(x)$ 的斜渐近线.

注：从垂（铅）直渐近线的定义可知：函数 $f(x)$ 有垂（铅）直渐近线 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 有无穷间断点. 因此求渐近线时应首先求出间断点处的极限，若等于无穷，则函数有垂（铅）直渐近线，否则，无垂（铅）直渐近线.

例 19 （2012 数一）曲线 $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线条数为（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

解：因为 -1，1 是函数的间断点，并且

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{x}{x-1}=\infty,\qquad \lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x^2+x}{x^2-1}=\lim_{x\to-1}\frac{x}{x-1}=\frac{1}{2}$$

又因为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^2-1}\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}=0.$$

所以有一条垂直渐近线 $x=1$ 和一条水平渐近线 $y=1$，无斜渐近线．因此应选 C.

四、分段函数分段点处可微性的判断

先求分点处的左、右导数，然后判断左、右导数是否相等．若左、右导数相等，则函数在该点可微，否则不可微．

例 20　(2016 数一、二、三) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0\\ \dfrac{1}{n}, & \dfrac{1}{n+1}<x\leqslant\dfrac{1}{n},\ n=1,2,3,\cdots\end{cases}$，则(　　).

A. $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点　　B. $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

C. $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导　　D. $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

解：因为 $\forall n$，当 $\dfrac{1}{n+1}<x\leqslant\dfrac{1}{n}$ 时，有 $1\leqslant\dfrac{1}{nx}<1+\dfrac{1}{n}$；于是，当 $\dfrac{1}{n+1}<x\leqslant\dfrac{1}{n}$ 时，有 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=1$.

所以当 $\dfrac{1}{n+1}<x\leqslant\dfrac{1}{n}$ 时，$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{nx}=1$. 从而当 $\dfrac{1}{n+1}<x\leqslant\dfrac{1}{n}$ 时，有

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{n}-0}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{nx}=1$$

又因为 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x-0}{x}=1$，所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导．

因此正确答案为 D.

1.5　战前演练

※ 基本功训练

一、选择题

1. (1989 数一) 当 $x>0$ 时，曲线 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ 满足(　　).

A. 有且仅有水平渐近线　　B. 有且仅有垂直渐近线

C. 既有水平又有垂直渐近线　　D. 既无水平又无垂直渐近线

2.（1991 数一）曲线 $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ 满足(　　).

A. 没有渐近线

B. 仅有水平渐近线

C. 仅有垂直渐近线

D. 既有水平渐近线又有垂直渐近线

3.（1992 数一）当 $x\to 1$ 时，函数$\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限为(　　).

A. 等于 2　　B. 等于 0

C. 等于 ∞　　D. 不存在但不等于 ∞

4.（1993 数一）设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin(t^2)\,dt$，$g(x)=x^3+x^4$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的(　　).

A. 等价无穷小　　B. 同阶但非等价的无穷小

C. 高阶无穷小　　D. 低阶无穷小

5.（1994 数一）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{x^2})}=2$，其中 $a^2+c^2\neq 0$，则必有(　　).

A. $b=4d$　　B. $b=-4d$　　C. $a=4c$　　D. $a=-4c$

6.（2003 数一）设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则必有(　　).

A. $a_n<b_n$ 对于任意的 n 成立　　B. $b_n<c_n$ 对于任意的 n 成立

C. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在　　D. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在

7.（2007 数一）当 $x\to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是(　　).

A. $1-e^{\sqrt{x}}$　　B. $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$　　C. $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　D. $1-\cos\sqrt{x}$

8.（2007 数一）曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 的渐近线的条数为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

9.（2007 数一）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题错误的是(　　).

A. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$

B. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$

C. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)=0$

D. 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$存在，则$f'(0)=0$

10.（2008 数一）设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调有界，$\{x_n\}$为数列，则正确的是（　　）.

A. 若$\{x_n\}$收敛，则$\{f(x_n)\}$收敛　B. 若$\{x_n\}$单调，则$\{f(x_n)\}$收敛

C. 若$\{f(x_n)\}$收敛，则$\{x_n\}$收敛　D. 若$\{f(x_n)\}$单调，则$\{x_n\}$收敛

11.（2009 数一）当$x\to 0$时，函数$f(x)=x-\sin ax$与函数$g(x)=x^2\ln(1-bx)$是等价无穷小，则（　　）.

A. $a=1,\ b=-\dfrac{1}{6}$　B. $a=1,\ b=\dfrac{1}{6}$

C. $a=-1,\ b=-\dfrac{1}{6}$　D. $a=-1,\ b=\dfrac{1}{6}$

12.（2010 数一）极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=$（　　）.

A. 1　B. e　C. e^{a-b}　D. e^{b-a}

13.（2012 数一）曲线$y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$的渐近线的条数为（　　）.

A. 0　B. 1　C. 2　D. 3

14.（2013 数一）已知极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$，其中$k$，$c$为常数，且$c\neq 0$，则（　　）.

A. $k=2,\ c=-\dfrac{1}{2}$　B. $k=2,\ c=\dfrac{1}{2}$

C. $k=3,\ c=-\dfrac{1}{3}$　D. $k=3,\ c=\dfrac{1}{3}$

15.（2014 数一）下列曲线有渐近线的是（　　）.

A. $y=x+\sin x$　B. $y=x^2+\sin x$

C. $y=x+\sin\dfrac{1}{x}$　D. $y=x^2+\sin\dfrac{1}{x}$

16.（2017 数一）若函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0\\ b, & x\leqslant 0\end{cases}$在$x=0$处连续，则（　　）.

A. $ab=\dfrac{1}{2}$　B. $ab=-\dfrac{1}{2}$　C. $ab=0$　D. $ab=2$

二、填空题

1.（1990 数一）设a为非零常数，则$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=$____________.

2.（1991 数一）已知当$x\to 0$时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$与$\cos x-1$是等价无穷小，则

常数 $a=$ ________.

3.（1994 数一）$\lim\limits_{x\to0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=$ ________.

4.（1995 数一）$\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$ ________.

5.（1996 数一）设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^{x}=8$，则 $a=$ ________.

6.（1997 数一）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$ ________.

7.（1998 数一）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$ ________.

8.（1999 数一）$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)=$ ________.

9.（2000 数一）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=$ ________.

10.（2003 数一）$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=$ ________

11.（2005 数一）曲线 $y=\dfrac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为 ________.

12.（2006 数一）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$ ________.

13.（2015 数一）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=$ ________.

14.（2016 数一）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\,dt}{1-\cos x^2}=$ ________.

※ 能力提升训练

1.（1987 数一）求正常数 a 与 b，使等式 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\dfrac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}dt=1$ 成立.

2.（1991 数一）计算 $\lim\limits_{x\to0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{x}{2}}$.

3.（1992 数一）计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$.

4.（1993 数一）计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

5.（1996 数一）设 $x_1=10$，$x_n+1=\sqrt{6+x_n}$，$n=1, 2, 3, \cdots$，试证数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求此极限.

6.（1998 数一）计算 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}$.

7.（2006 数一）设数列$\{x_n\}$满足$0<x_1<\pi$，$x_n+1=\sin x_n$，$n=1,2,3\cdots$.

（1）证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求该极限；

（2）计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n+1}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

8.（2008 数一）计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

9.（2010 数一）

（1）比较$\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t$与$\int_0^1|\ln t|t^n\mathrm{d}t$，$n=1,2,3,\cdots$的大小，并说明理由.

（2）记$u_n=\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n\mathrm{d}t$，$n=1,2,3,\cdots$，求极限$\lim\limits_{x\to\infty}u_n$.

10.（2011 数一）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$.

11.（2011 数一）

（1）证明：对任意的正整数n，都有$\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$成立；

（2）设$a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$，$n=1,2,3,\cdots$，证明数列$\{a_n\}$收敛.

12.（2014 数一）求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

13. 设函数$f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$，$g(x)=kx^3$，若当$x\to 0$时，函数$f(x)$与$g(x)$是等价无穷小，求$a$，$b$，$k$的值.

14. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\cos\dfrac{\pi}{n}+\dfrac{2}{n^2}\cos\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\dfrac{k}{n^2}\cos\dfrac{k\pi}{n}\right)$.

15. 设函数$1-\cos x\cos 2x\cos 3x$与函数ax^k为当$x\to 0$时的等价无穷小，求常数a，k的值.

16.（2010 数一）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$（　　）.

A. $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$　　B. $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\dfrac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$

C. $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\dfrac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$　　D. $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$