

目 录

第 1 章 复数与复变函数	1
1.1 复数及其基本运算	1
1.2 复平面上的点集	14
1.3 复变函数	18
课后习题	24
第 2 章 解析函数	26
2.1 解析函数的概念	26
2.2 函数解析的充要条件	30
2.3 解析函数与调和函数	34
2.4 初等函数	41
2.5 解析函数的物理意义	51
课后习题	58
第 3 章 初等函数	60
3.1 指数函数	60
3.2 对数函数	62
3.3 对数函数的分支和导数	63
3.4 幂函数	65
3.5 三角函数	66
3.6 双曲函数	69
3.7 反三角函数与反双曲函数	71
课后练习	73
第 4 章 积分	75
4.1 函数 $\omega(t)$ 的导数与定积分	75
4.2 围线积分	78
4.3 柯西-古萨定理	80
4.4 柯西积分	82

4.5 刘维尔定理与代数基本原理	89
课后练习	90
第5章 级数	92
5.1 复变函数项级数	92
5.2 幂级数	100
5.3 泰勒级数	109
5.4 洛朗级数	116
课后习题	123
第6章 留数和极点	125
6.1 孤立奇点	125
6.2 留数	126
6.3 柯西留数定理	130
6.4 三种类型的孤立奇点	132
6.5 极点处的留数	133
课后习题	134
第7章 函数的映射	136
7.1 初等函数映射	136
7.2 共形映射	147
7.3 共形映射的应用	158
7.4 施瓦茨-克里斯托费尔映射	170
课后习题	174
第8章 泊松型积分公式	176
8.1 泊松积分公式	176
8.2 圆盘的狄利克雷问题	178
8.3 相关的边值问题	180
8.4 施瓦茨积分公式	182
8.5 半平面的狄利克雷问题	183
8.6 诺伊曼问题	185
课后习题	187
参考文献	192

第 1 章 复数与复变函数

在本章里，我们先介绍复数系统的代数和几何结构，然后引进复变量的函数——复变函数，进而介绍它的极限和连续性。

1.1 复数及其基本运算

1.1.1 复数概念及四则运算

为了便于以后讨论，在这里回顾有关复数的基本定义及结论。

设 x, y 为两实数，称形如

$$z = x + iy (\text{或 } x + yi)$$

的数为复数，这里 i 为虚单位，具有性质 $i^2 = -1$ 。 x 及 y 分别称为 z 的实部与虚部，常记作

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z$$

虚部为零的复数为实数，简记为 $x + i0 = x$ 。因此，全体实数是复数的一部分，特别记 $0 + i0 = 0$ ，即当且仅当 z 的实部和虚部同时为零时复数 z 为零。实部为零且虚部不为零的复数称为纯虚数，如果两复数的实部和虚部分别相等，则称两复数相等。

设

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2$$

定义两复数 z_1, z_2 的四则运算是

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \quad (1.1)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \quad (1.2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2) \quad (1.3)$$

如果 $z_2 \neq 0$ ，则

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)}$$



$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (1.4)$$

从式 (1.1) — 式 (1.4) 即知复数经过四则运算得到的仍旧是复数。又从式 (1.1) 和式 (1.2) 以及实部与虚部的定义得出

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z_1 \pm z_2) &= \operatorname{Re} z_1 \pm \operatorname{Re} z_2 \\ \operatorname{Im}(z_1 \pm z_2) &= \operatorname{Im} z_1 \pm \operatorname{Im} z_2 \end{aligned} \quad (1.5)$$

【例 1.1】化简 $i^3, \frac{i}{1-i} + \frac{1-i}{i}$.

解:

$$\begin{aligned} i^3 &= i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i \\ \frac{i}{1-i} + \frac{1-i}{i} &= \frac{i^2 + (1-i)^2}{(1-i)i} = \frac{-1-2i}{1+i} \\ &= \frac{(-1-2i)(1-i)}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

【例 1.2】计算

$$(1) \frac{2+3i}{2-3i}; \quad (2) \frac{2i}{\sqrt{3}-i} - \frac{3}{\sqrt{3}i-1}.$$

$$\text{解: } (1) \frac{2+3i}{2-3i} = \frac{(2+3i)^2}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{4+12i-9}{4+9} = -\frac{5}{13} + \frac{12}{13}i$$

$$(2) \frac{2i}{\sqrt{3}-i} - \frac{3}{\sqrt{3}i-1} = \frac{2i}{\sqrt{3}-i} - \frac{3}{i(\sqrt{3}+i)} = \frac{2i}{\sqrt{3}-i} + \frac{3i}{\sqrt{3}+i} = \frac{1}{4} + \frac{5\sqrt{3}}{4}i$$

【例 1.3】已知 $x+yi=(2x-1)+y^2i$, 求 $z=x+iy$.

解 比较等式两端的实部与虚部, 得

$$\begin{aligned} x &= 2x-1, \quad x=1 \\ y &= y^2, \quad y=0 \quad \text{或} \quad y=1 \end{aligned}$$

由此解得

$$z=1 \text{ 或 } z=1+i$$

1.1.2 复数的几何表示

任意给定一个复数 $z=1+i$, 都与一对有序实数 $z=x+iy$ 相对应。而任意一对有序实数 (x,y) 都与平面直角坐标系中的点 (x,y) 对应, 这样能够建立平面上的全部点与全体复数间的一一对应关系, 于是可用平面直角坐标系中的点来表示复数 (图 1.1)。

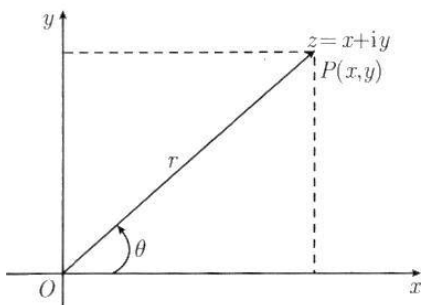


图 1.1

表示复数 Z 的直角坐标平面称为复平面或 z 平面, 复平面也常用 z - 来表示. 因复平面上的 $\mathbb{C}$ 轴上的点对应实数, x 轴上非零的点对应纯虚数, 故称 x 轴为实轴, y 轴为虚轴. 由于全体复数与复平面上的点的全体是一一对应的, 以后把“点 z ”和“复数 z ”作为同义词而不加区别.

在复平面上, 如图 1.1 所示, 从原点 O 到点 $P(x, y)$ 作向量 $\overrightarrow{op}$, 我们看到复平面上由原点出发的向量的全体与复数的全体 $\mathbb{C}$ 之间也构成一一对应关系 (复数 0 对应着零向量), 因此也可以用向量 $\overrightarrow{op}$ 来表示复数 $z = x + iy$.

在物理学中, 力、速度、加速度等都可用向量表示, 说明复数可以用来表示实有的物理量.

向量 $\overrightarrow{op}$ 的长度 r 称为复数 z 的模或绝对值, 记作 $|z|$, 即 $|z| = r$. 实轴正向转到与向量 $\overrightarrow{op}$ 方向一致时, 所成的角度 θ 称为复数的辐角, 记作 $\text{Arg} z$, 即 $\text{Arg} z = \theta$.

复数 0 的模为零, 即 $|0| = 0$, 其辐角是不确定的. 任何不为零的复数 z 的辐角 $\text{Arg} z$ 均有无穷多个值, 彼此之间相差 2π 的整数倍, 通常把满足 $-\pi < \theta_0 \leq \pi$ 的辐角值 θ_0 称为 $\text{Arg} z$ 的主值, 记作 $\arg z$, 于是

$$\text{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

并且可以用复数 z 的实部与虚部来表示辐角主值 $\arg z$:

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & x < 0, y > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0 \end{cases}$$

由直角坐标与极坐标的关系 (图 1.1), 我们立即得到不为零的复数的实部、虚部与该复数的模、辐角之间的关系

$$\begin{cases} r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \theta = \tan(\text{Arg} z) = \frac{y}{x} \end{cases} \quad (1.6)$$



以及

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (1.7)$$

于是复数 z 又可表示为

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (1.8)$$

式(1.8)通常称为复数 z 的三角表示式。如果再利用欧拉(Euler)公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

又可以得到

$$z = re^{i\theta} \quad (1.9)$$

这种形式称为复数的指数表示式。

两复数的实部与虚部分别相等,则称两复数相等。于是从式(1.6)与式(1.7)即知两复数相等,其模必定相等,其辐角可以差 2π 的整数倍(辐角如果都取主值,则应相等)。反之,如果复数的模及辐角分别相等,则从式(1.8)即知这两个复数必然相等。

因复数可用向量表示,故复数是既有大小、又有方向的量,所以两个复数,如果不都是实数,就无法比较大小。但是,两个复数的模都是实数,就可以比较大小。

从图 1.1 可以看出

$$-r \leq x, y \leq r$$

即

$$-|z| \leq \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \leq |z|$$

【例 1.4】求下列各复数的模及辐角。

(1) -2 ; (2) $-i$; (3) $1+i$.

解 由 z 平面上的对应点的位置,可以看出

$$(1) |-2| = 2, \arg(-2) = \pi, \operatorname{Arg}(-2) = \pi + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$(2) |-i| = 1, \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}, \operatorname{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$(3) |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}, \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}, \operatorname{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

【例 1.5】将复数 $z = -1 - \sqrt{3}i$ 分别化为三角表示式和指数表示式。

解 因为 $x = -1, y = -\sqrt{3}$, 所以 $r = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$

又在第三象限内, 于是

$$\arg z = \arctan \frac{-\sqrt{3}}{-1} - \pi = -\frac{2\pi}{3}$$

$$\text{所以 } z = 2 \left[\cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right) \right]$$

由正、余弦函数的周期性, 也可表为



$$z = 2 \left[\cos \left(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right) \right]$$

相应的指数表示式为

$$z = 2e^{\left(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right)i}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

以 $\overrightarrow{Oz_1}$ 和 $\overrightarrow{Oz_2}$ 为两邻边作一平行四边形 Oz_1zz_2 , 通过图 1.2 可以说明, 复数的加法、减法法则与向量的加法、减法法则一致。通过两向量的和与差的几何作图法, 在复平面中可以求出相应两复数的和 $z_1 + z_2$ 与差 $z_1 - z_2$ 的对应点。

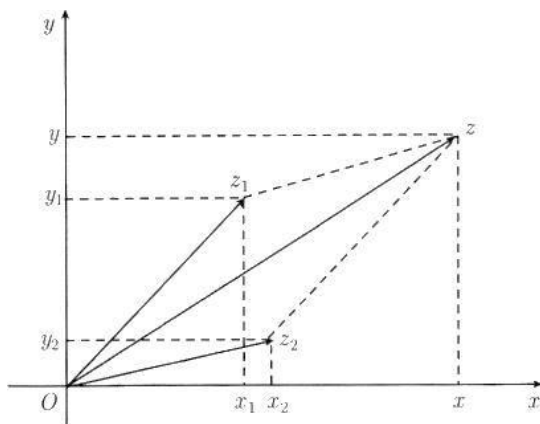


图 1.2

在图 1.3 中, 以向量 $\overrightarrow{Oz_1}$ 和 $\overrightarrow{Oz_2}$ 为邻边的平行四边形的两条对角线向量 $\overrightarrow{Oz}$ 及 $\overrightarrow{z_2z_1}$ 就分别对应于复数 $z_1 + z_2$ 及 $z_1 - z_2$. 由于 $\overrightarrow{Oz}$ 的起点为原点 O , 因而终点 $\overrightarrow{Oz}$ 所对应的复数就是 $z_1 + z_2$; 而向量 $\overrightarrow{z_2z_1}$ 的起点不是原点, 经平移得起点为原点 O 的向量 $\overrightarrow{OS}$, 则终点 S 所对应的复数就是 $z_1 - z_2$. 从图 1.3 还可以看到, $|z_1 - z_2|$ 表示复平面上两点 z_1 与 z_2 之间的距离, 事实上, 有

$$|z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

这正是平面上两点距离的表达式。

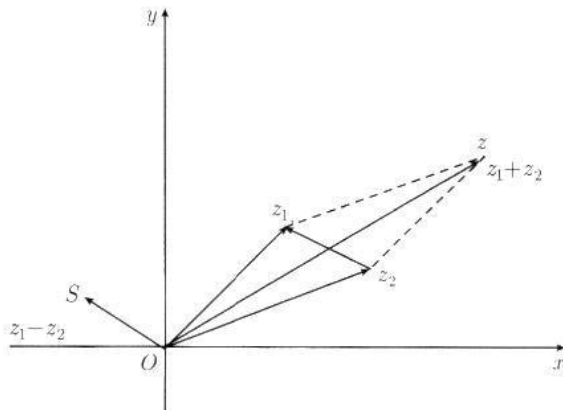


图 1.3



1.1.3 共轭复数

实部相等、虚部互为相反数的两个复数称为共轭复数，如果其中一个复数记作 z ，则其共轭复数记作 $\bar{z}$ 。于是

$$x - iy = \overline{x + iy} \quad (1.10)$$

由定义，显然 $\bar{\bar{z}} = z$ 。特别地，实数的共轭复数是该实数本身；反之，如果复数 z 与它的共轭复数 $\bar{z}$ 相等，则这个复数便是一个实数。

由定义不难验证，两复数的和、差、积、商的共轭复数，分别等于这两复数的共轭复数的和、差、积、商，即

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 \quad (1.11)$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \quad (1.12)$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (z_2 \neq 0) \quad (1.13)$$

我们还可以用共轭复数来表示复数的实部与虚部以及模，例如

$$2 \operatorname{Re} z = z + \bar{z}$$

$$2i \operatorname{Im} z = z - \bar{z}$$

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$

$$|\bar{z}| = |z|$$

利用共轭复数的性质，我们能够比较容易地证明两个重要的不等式

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (1.14)$$

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2|| \quad (1.15)$$

事实上，从共轭复数的性质，我们有

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + \overline{z_1z_2} + z_1\bar{z}_2 + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2 \\ &\leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

由此可得不等式 (1.14)。如将上式中 z_2 换成 $-z_2$ ，则有

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2|^2 &= |z_1|^2 - 2 \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2 \\ &\geq |z_1|^2 - 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| - |z_2|)^2 \end{aligned}$$

即得不等式 (1.15)。

当然在图 1.3 中利用三角形三边关系也可证明式 (1.14) 及式 (1.15)。

【例 1.6】 A, C 为实数， $A \neq 0$ ， β 为复数且 $|\beta|^2 > AC$ ，证明 z 平面上的圆周可以写成



$$A z \bar{z} + \beta \bar{z} + \bar{\beta} z + C = 0$$

证明 在平面解析几何中, 已知任意一圆的方程可写作

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Dy + C = 0 \quad (1.16)$$

这里 A, B, C, D 为实数, 且 $A \neq 0$, $B^2 + D^2 - 4AC > 0$ 。我们知道

$$x^2 + y^2 = z \bar{z}, \quad x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

以此代入方程式 (1.16), 有

$$A z \bar{z} + \frac{B}{2}(z + \bar{z}) + \frac{D}{2i}(z - \bar{z}) + C = 0$$

也就是

$$A z \bar{z} + \frac{1}{2}(B - Di)z + \frac{1}{2}(B + Di)\bar{z} + C = 0 \quad (1.17)$$

令

$$\beta = \frac{1}{2}(B + Di)$$

以此代入式 (1.17) 即得证。

【例 1.7】计算 $(2+3i)\overline{(2+3i)} - (4-3i)^2$

$$\begin{aligned} \text{解 } (2+3i)\overline{(2+3i)} - (4-3i)^2 &= (2+3i)(2-3i) - (16-24i-9) \\ &= 4+9-7+24i = 6+24i \end{aligned}$$

有时利用复数的代数运算来证明平面几何问题也很方便。

【例 1.8】证明等式 $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$, 并对此等式作出几何解释。

证明

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + (z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) \\ |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) \end{aligned}$$

将此二式相加便得

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

以上等式的几何意义是: 平行四边形的对角线的平方和等于四条边的平方和 (图 1.4)。

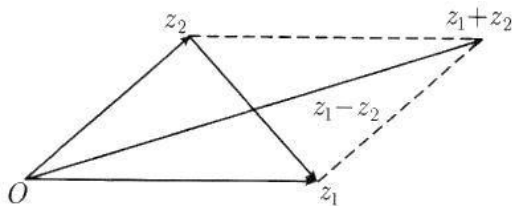


图 1.4



【例 1.9】若 $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$, 且 $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1$, 则此四点构成一个内接于单位圆的矩形。

证明 因为 $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1$, 故四边形 $z_1 z_2 z_3 z_4$ 内接于单位圆 $|z| = 1$ 。

又因 $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$ 知

$$\frac{z_1 + z_2}{2} = -\frac{z_3 + z_4}{2}$$

若设 $z_k = x_k + iy_k (k=1, 2, 3, 4)$, 则有

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{x_3 + x_4}{2}, \quad \frac{y_1 + y_2}{2} = -\frac{y_3 + y_4}{2}$$

故边 $z_1 z_2$ 的中点与边 $z_3 z_4$ 的中点关于原点为对称, 从而 $z_1 z_2 z_3 z_4$ 为一矩形。

1.1.4 乘除、乘方与开方

把复数表示成三角表示式, 再进行乘除或乘方、开方, 比直接用代数式运算有时要方便得多, 下面我们首先来讨论乘法。

设

$$z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), \quad z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \quad (1.18)$$

则

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= [r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)] [r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)] \\ &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned} \quad (1.19)$$

由此可知, 把两复数相乘, 只要把它们的模相乘、辐角相加即可。

由此也可得到两复数乘积的几何作图法: 将向量 z_1 沿本身方向伸长 $|z_2|$ 倍, 再旋转一个角 $\arg z_2$, 该向量的终点即为积 $z_1 z_2$ (图 1.5)。

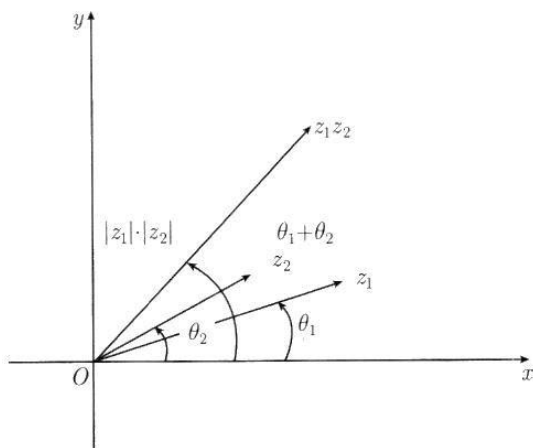


图 1.5



特别地, 当 $|z_2|=1$ 时, 两复数 z_1 与 z_2 的乘积就只是旋转。例如, $z_2=i$, 由于 i 的辐角主值是 $\pi/2$, 那么 iz_1 就可由向量 z_1 逆时针旋转 $\pi/2$ 弧度的角而得到; 再如 $z_2=-1$, 那么 $-z_1$ 就可由向量 z_1 逆时针旋转 π 弧度的角而得到,

其次讨论除法, 设式(1.18)中的 $z_2 \neq 0$, 则 $r_2 > 0$ 。由除法的定义式(1.5)得

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2) \\ &= \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] \end{aligned} \quad (1.20)$$

表示一复数, 其模为 r_1/r_2 , 其辐角为 $\theta_1 - \theta_2$ 。

由此可知, 两复数相除, 只需把它们的模相除、辐角相减即可。

【例 1.10】化简 $\frac{(1-\sqrt{3}i)(\cos \theta + i \sin \theta)}{(1-i)(\cos \theta - i \sin \theta)}$

解 因为

$$\begin{aligned} 1-\sqrt{3}i &= 2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] \\ 1-i &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] \\ \cos \theta - i \sin \theta &= \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} &\frac{(1-\sqrt{3}i)(\cos \theta + i \sin \theta)}{(1-i)(\cos \theta - i \sin \theta)} \\ &= \frac{2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right](\cos \theta + i \sin \theta)}{\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right][\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)]} \\ &= \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right](\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \\ &= \sqrt{2}\left[\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{12}\right)\right] \end{aligned}$$

【例 1.11】试证 z_1, z_2, z_3 在一条直线上的条件是 $\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$ 实数。

证明 z_1, z_2, z_3 在一直线上的条件是以线段 $\overline{z_2 z_3}$ 与线段 $\overline{z_1 z_3}$ 为两边的角 $\angle z_2 z_3 z_1$ 是 π 的整数倍, 即将 z_3 平移到原点来考虑(图 1.6)。

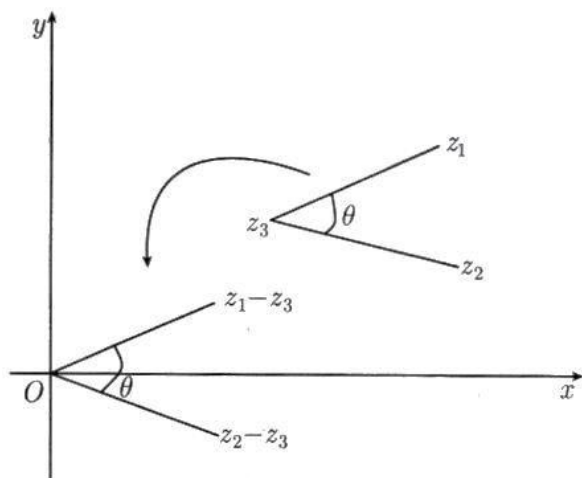


图 1.6

则

$$\arg \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = n\pi$$

故 $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ 为实数是充要条件。

令

$$z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

$$z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

.....

$$z_n = r_n (\cos \theta_n + i \sin \theta_n)$$

重复地应用式 (1.19) 可得

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)] \quad (1.21)$$

如果 $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, 则上式可化为

$$z^n = [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) \quad (1.22)$$

由此可知, 求复数的 n 次方 (n 为正整数) 只要求它的模的 n 次方、辐角的 n 倍即可。

特别地, 当 $r=1$ 时, 式 (1.22) 就是有名的棣莫弗 (De Moivre) 公式

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta = e^{in\theta} \quad (1.23)$$

上面, 我们已经证明: n 为正整数时, 式 (1.23) 成立, 当 $n=0$ 时, 式 (1.23) 的左右两端都是 1, 显然式 (1.23) 成立, 还可以证明: 当 n 为负整数时, 式 (1.23) 也成立。事实上, 令 $n=-m$, m 为正整数, 则根据负指数幂的定义以及式 (1.23) 对正整数成立, 并利用公式 (1.20) 即得

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = (\cos \theta + i \sin \theta)^{-m} = \frac{1}{(\cos \theta + i \sin \theta)^m} = \frac{\cos 0 + i \sin 0}{\cos m\theta + i \sin m\theta}$$



$$= \cos(-m\theta) + i \sin(-m\theta) = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

这就证明当 n 为负整数时, 式(1.23)也成立, 综上所述, 即知对所有整数来说, 式(1.23)恒成立。

【例 1.12】设 n 为正整数, 试证明

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{3n+1} + \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{3n+1} = -1$$

证明 因为

$$\begin{aligned}\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} &= \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} &= \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}& \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{3n+1} + \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{3n+1} \\&= \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{3n} \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) + \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{3n} \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right) \\&= (\cos 2n\pi + i \sin 2n\pi) \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) + (\cos 4n\pi + i \sin 4n\pi) \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right) \\&= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} + \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = -1\end{aligned}$$

若对于复数 z , 存在复数 w 满足等式: $w^n = z$ (n 是大于1的整数), 则称 w 为 z 的 n 次方根, 记作 $\sqrt[n]{z}$, 即 $w = \sqrt[n]{z}$ 。求方根的运算称为开方。

为从已知的 z 求 w , 我们把 z 及 w 均用三角表示式写出。设

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad w = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

则由 $w^n = z$ 及乘方运算有

$$\rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

考虑到辐角多值性, 得到

$$\rho^n = r, \quad n\varphi = \theta + 2k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

由此, $|w| = \rho = r^{\frac{1}{n}}, r^{\frac{1}{n}}$ 是 r 的 n 次算术根, 则

$$\text{Arg } w = \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

这就是所求的 z 的 n 次方根。从这个表达式可以看出:

(1) 当 $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ 时, 得到 n 个相异的值

$$w_0 = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\theta}{n} + i \sin \frac{\theta}{n} \right)$$



$$w_1 = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2\pi}{n} \right) \right]$$

.....

$$w_{n-1} = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n} \right) \right]$$

当 k 取其他整数值时, 将重复出现上述 n 个值。因此, 一个复数 z 的 n 次方根有且仅有 n 个相异值, 即

$$\sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (1.24)$$

(2) 上述 n 个方根的相异值 $w_k (k=0, 1, 2, \dots, n-1)$ 具有相同的模的 $r^{\frac{1}{n}}$, 而每两相邻值的辐角的差为 $2\pi/n$, 故在几何上, $\sqrt[n]{z}$ 的 n 个值分布在以原点为圆心、 $r^{\frac{1}{n}}$ 为半径的圆内接正 n 边形的顶点上,

【例 1.13】求 $\sqrt[4]{1+i}$ 。

解 因为 $1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$, 所以

$$\sqrt[4]{1+i} = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} \right) \quad (k=0, 1, 2, 3)$$

即

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\pi}{16} + i \sin \frac{\pi}{16} \right) \\ w_1 &= \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{9}{16}\pi + i \sin \frac{9}{16}\pi \right) \\ w_2 &= \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{17}{16}\pi + i \sin \frac{17}{16}\pi \right) \\ w_3 &= \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{25}{16}\pi + i \sin \frac{25}{16}\pi \right) \end{aligned}$$

这四个根是内接于中心在原点, 半径为 $\sqrt[4]{2}$ 的圆的正方形的四个顶点上 (图 1.7), 并且

$$w_1 = iw_0, \quad w_2 = -w_0, \quad w_3 = -iw_0$$

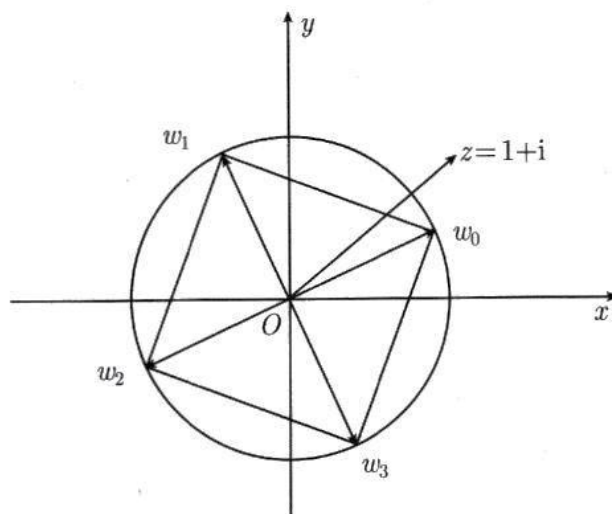


图 1.7

1.1.5 复球面与无穷远点

在 1.1.2 节中我们建立了复数与复平面上的点的一一对应关系，下面我们再建立复数与球面上的点的一一对应，以便引进无穷远点的概念。

将 xOy 平面看作复平面，取一个球面将其南极 S 与复平面上原点相切（图 1.8）。设 P 为球面上的任一点，从球面北极 N 作射线 NP ，必交于复平面的一点 Q ，它在复平面上表示一个模为有限的复数。反过来，从球极 N 出发，且过复平面上任一模为有限的点 Q 的射线，也必交于球面上的一个点，记作 P 。于是复平面上的点与球面的点（除 N 点外）建立了一一对应关系。

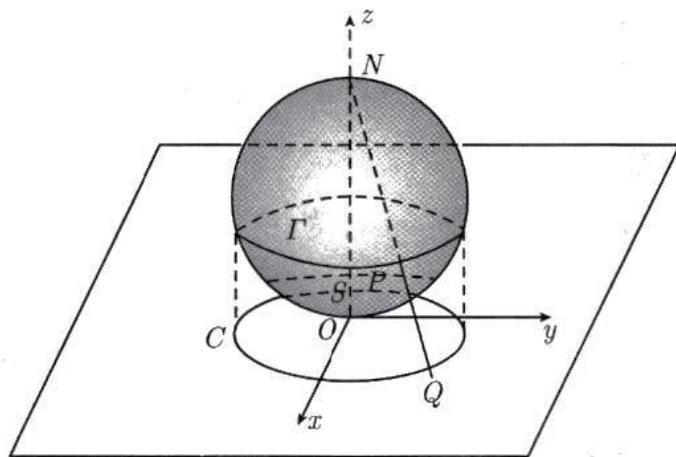


图 1.8



考虑复平面上一个以原点为圆心的圆周 C ，在球面上对应的也是一个圆周 Γ 。当圆周 C 的半径越大时，圆周 Γ 就越趋于北极 N ，因此，北极 N 可以看成是与复平面上的一个模为无穷大的假想点相对应，这个唯一的假想点称为无穷远点，并记作 ∞ 。复平面上加点 ∞ 后，称为扩充复平面，与它对应的就是整个球面，称为复球面，并且扩充复平面上的点与复球面上的点构成一一对应。简单来说，扩充复平面的一个几何模型就是复球面，对于模为有限的复数，我们称为有限复数，除去 ∞ 的复平面称为有限复平面。

有限复平面常记为 $\mathbb{C}$ ，扩充复平面记为 $\bar{\mathbb{C}}$ ，我们有 $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ，对于所有有限复数 $a \in \mathbb{C}$ ，规定 $a \pm \infty = \infty \pm a = \infty$ ，且当 $a \neq 0$ 时，规定 $\infty \cdot a = a \cdot \infty = \infty$ ， $\frac{a}{0} = \infty$ ， $\frac{a}{\infty} = 0$ 以及 $|\infty| = +\infty$ ，且 ∞ 的实部、虚部及辐角都无意义，显然，复平面上每一条直线都通过 ∞ 点。

1.2 复平面上的点集

1.2.1 基本概念

由不等式 $|z - z_0| < \delta$ ($\delta > 0$)所确定的复平面点集（简称点集），就是以 z_0 为圆心、 δ 为半径的圆的内部，称为点 z_0 的 δ -邻域，常记作 $N(z_0, \delta)$ 。如果 z_0 不属于其自身的 δ -邻域，则称该邻域为 z_0 的去心 δ -邻域，常记作 $N^\circ(z_0, \delta)$ ，可用不等式 $0 < |z - z_0| < \delta$ 表示。

在扩充复平面上，无穷远点的邻域应理解为以原点为圆心的某圆周的外部，即 ∞ 的 δ -邻域 $N(\infty, \delta)$ 是指满足条件 $|z| > 1/\delta$ 的点集。

若点集 D 的点 z_0 有一邻域全含于 D 内，则称 z_0 为 D 的内点；若点集 D 的点均为内点，则称 D 为开集；若在点 z_0 的任意邻域内，同时有属于点集 D 和不属于 D 的点，则称 z_0 为 D 的边界点；点集 D 的全部边界点所组成的点集称为 D 的边界，常记作 ∂D 。

若有正数 M ，对于点集 D 内的点 z ，均满足条件 $|z| \leq M$ ，即若 D 全含于一圆之内，则称 D 为有界集，否则称 D 为无界集。

若点 z_0 的任意邻域内总有点集 D 中的无穷多点，则 z_0 称为 D 的极限点或聚点；若 D 的所有极限点都属于 D ，则称 D 为闭集。

1.2.2 区域和曲线

为引进复变函数，我们需要介绍区域的概念，



【定义 1.1】如果复平面上非空点集 D 具有下面的两个性质：

(1) 属于 D 的点都是 D 的内点；

(2) D 内任意两点都可用一条具有有限折的折线把它们连接起来，且这折线上所有的点均属于 D （此性质称为 D 的连通性）；则称点集 D 为区域（图 1.9）。

区域加上它的全部边界点所构成的点集，称为闭区域，记作 $\bar{D} = D \cup \partial D$

应用关于复数 z 的不等式来表示 z 平面上的区域，有时是很方便的。

【例 1.14】 z 平面上以原点为圆心、 R 为半径的圆（圆形区域）

$$|z| < R$$

以及 z 平面上以原点为圆心、 R 为半径的闭圆（圆形闭区域）

$$|z| \leq R$$

它们都以圆周 $|z| = R$ 为边界，且都是有界的。

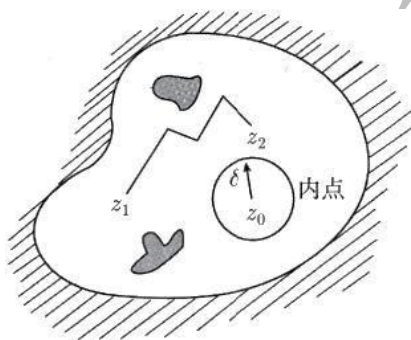


图 1.9

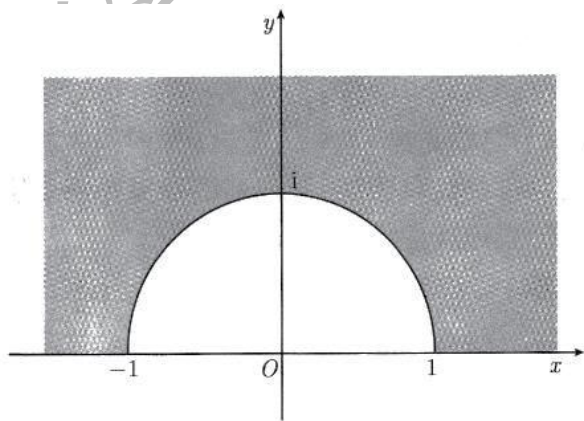


图 1.10

【例 1.15】如图 1.10 所示，阴影部分为单位圆周的外部含在上半 z 平面的部分，表示为

$$\begin{cases} |z| > 1 \\ \operatorname{Im} z > 0 \end{cases}$$



【例 1.16】如图 1.11 所示，阴影部分为带形区域，表示为

$$y_2 < \operatorname{Im} z < y_1$$

【例 1.17】如图 1.12 所示，阴影部分为同心圆环（即圆环形区域），表示为

$$r < |z| < R$$

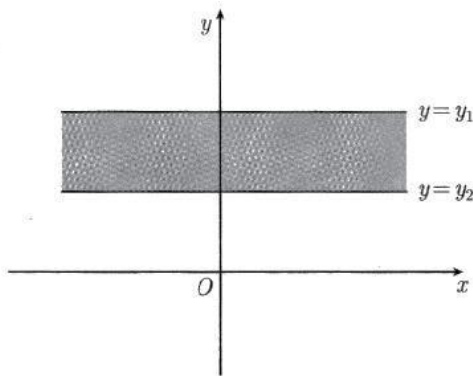


图 1.11

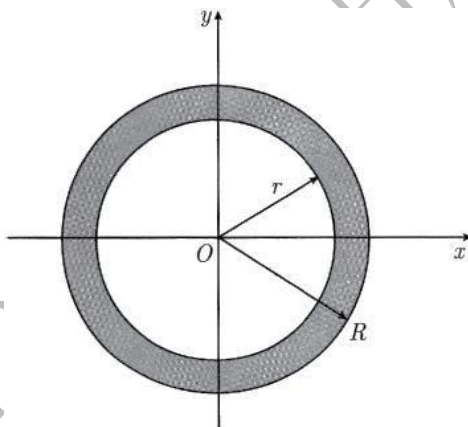


图 1.12

一般区域的边界可能十分复杂，在上面所举例子中，圆盘的边界是圆周，为了研究比较一般的区域，先讲述曲线的概念。

如果曲线

$$\Gamma: z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

的实部 $x(t)$ 与虚部 $y(t)$ 均为 t 的连续函数，那么称曲线 Γ 为连续曲线。对于连续曲线 $\Gamma: z = z(t)$ ，当 $t_1 \neq t_2$ ($\alpha < t_1, t_2 < \beta$) 时， $z(t_1) \neq z(t_2)$ ，即曲线没有重点，则称 Γ 为简单曲线；当 $z(\alpha) = z(\beta)$ 时，则称 Γ 为简单闭曲线，线段、圆弧和抛物线弧段等都是简单曲线；圆周和椭圆等都是简单闭曲线。

如果连续曲线



$$\Gamma: z = z(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

在区间 $\alpha \leq t \leq \beta$ 上存在连续的导数 $x'(t)$ 及 $y'(t)$, 且二者不同时为零, 则在曲线 Γ 上每点均有切线且切线方向是连续变化的, 我们称这种曲线为光滑曲线, 由有限段光滑曲线连接而成的连续曲线称为逐段光滑曲线 (或按段光滑曲线), 但这种曲线在连接点处可能不存在切线。特别地, 折线是逐段光滑曲线,

若尔当 (Jordan) 定理任何简单闭曲线一定把扩充复平面分成两个没有公共点的区域, 一个是有界的, 称为该曲线的内部; 另一个是无界的, 称为该曲线的外部, 这两个区域都以已给的简单闭曲线 (也称若尔当曲线) 作为边界,

下面将区域分类。

【定义 1.2】在复平面上, 如果区域 D 内任意一条简单闭曲线的内部都含于区域 D 内, 则称 D 为单连通区域; 否则就称 D 为多连通区域。

【例 1.18】指出下列不等式中点 z 在怎样的点集内变动? 这些点集是不是单连通区域? 是否有界?

$$(1) \operatorname{Re} z > \frac{1}{2},$$

$$(2) |z+i| \leq |2+i|,$$

$$(3) |z| < 1, \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{2}$$

解 (1) 满足条件的一切点所组成的点集, 是以直线 $\operatorname{Re} z = 1/2$ 为边界的右半平面, 但不包括直线 $\operatorname{Re} z = 1/2$, 它是单连通区域 (图 1.13)。

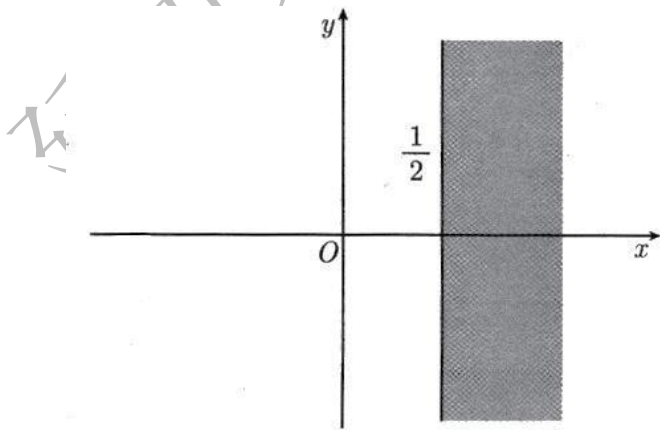


图 1.13

(2) 不等式 $|z+i| \leq |2+i|$ 等价于 $|z+i| \leq \sqrt{5}$ 。因此满足条件的一切点 z 所组成的点集, 是以点 $-i$ 为圆心、 $\sqrt{5}$ 为半径的闭圆盘, 它不是区域, 而是一个闭区域 (图 1.14)。

(3) 满足不等式 $|z| < 1, \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{2}$ 的一切点 z 所组成的点集, 是以原点为圆心、1 为半径的



圆盘和以直线 $\operatorname{Re} z = 1/2$ 为右边界的区域（包括 $\operatorname{Re} z = 1/2$ ）的公共部分，又因位于圆盘内的直线 $\operatorname{Re} z = 1/2$ 上的点不是内点，故它不是区域（图 1.15）。

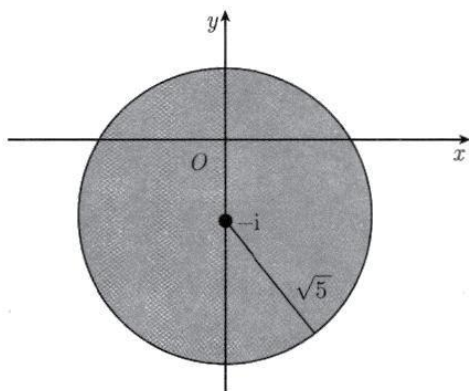


图 1.14

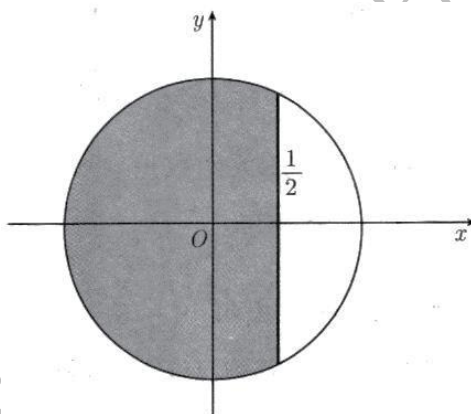


图 1.15

1.3 复变函数

1.3.1 定义与几何意义

【定义 1.3】设 G 是复数 $z = x + iy$ 的集合。如果存在一个法则，按这个法则对于 G 的每一个 z ，都有一个（或多个）确定的复数 $w = u + iv$ 与之对应，那么就称复变量 w 为复变量 z 的复变函数，简称 w 是 z 的复变函数，记作

$$w = f(z)$$