

第一章 静力学基础知识 /1

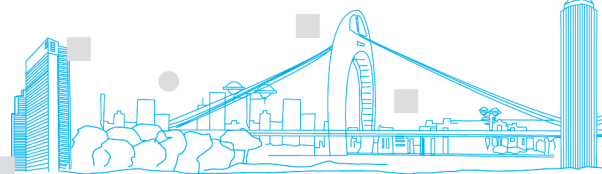
第一节 静力学的基本概念	1
第二节 静力学基本公理	4
第三节 平面汇交力系的合成与平衡条件	7
第四节 力对点的矩	10
第五节 力偶、力偶矩	11
第六节 力的平移定理	14

第二章 力系的合成与平衡 /16

第一节 力的合成与分解	16
第二节 平面力系的合成	19
第三节 平面力系的平衡	26
第四节 空间力系的合成	30
第五节 空间力系的平衡	35

第三章 轴向拉伸与压缩 /39

第一节 轴向拉伸与压缩的概念及实例	39
第二节 直杆轴向拉伸（压缩）时横截面上的正应力	40
第三节 许用应力、强度条件	45
第四节 轴向拉伸或压缩时的变形	49
第五节 材料拉伸、压缩时的力学性质	53



第四章 剪切和扭转 /60

第一节 剪切的概念及实例	60
第二节 连接接头的强度计算	61
第三节 扭转的概念及实例	67
第四节 扭矩的计算	68
第五节 圆轴扭转时的应力和变形	71
第六节 圆轴扭转时的强度条件和刚度条件	78

第五章 梁的弯曲应力和强度问题 /83

第一节 梁的弯曲正应力	83
第二节 梁的弯曲剪应力	88
第三节 梁的强度条件	89
第四节 提高梁强度的措施	91

第六章 组合变形的强度问题 /95

第一节 组合变形的概述	95
第二节 斜弯曲	96
第三节 偏心压缩与截面核心	99

第七章 压杆稳定 /104

第一节 压杆稳定的概念	104
第二节 压杆的临界力和临界应力	106
第三节 压杆的稳定计算	114

第八章 平面杆件体系的几何组成分析 /121

第一节 平面杆件体系的几何组成分析概述	121
第二节 几何不变体系的组成规则	125
第三节 几何组成分析的应用	129
第四节 静定结构与超静定结构	131

第九章 静定结构的内力计算 /132

第一节 杆件的内力·截面法	132
第二节 内力方程·内力图	134
第三节 用叠加法作剪力图和弯矩图	142
第四节 静定平面刚架	144
第五节 静定多跨梁	150
第六节 三铰拱	153
第七节 静定平面桁架	160

第十章 静定结构的位移计算 /166

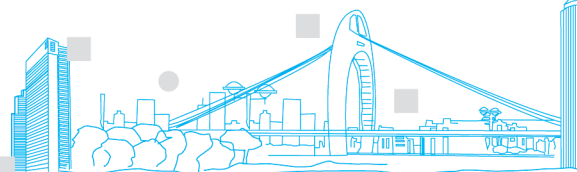
第一节 位移计算的概述	166
第二节 变形体的虚功原理	169
第三节 结构位移计算的一般公式	172
第四节 结构在荷载作用下的位移计算	174
第五节 图乘法	181

第十一章 超静定结构的受力分析 /198

第一节 超静定结构和超静定次数	188
第二节 力法	191
第三节 位移法	211
第四节 力矩分配法	230
第五节 超静定结构的特性	237

第十二章 影响线 /239

第一节 影响线的概念	239
第二节 静定梁的影响线绘制	241
第三节 影响线的应用	247
第四节 简支梁的内力包络图	256



附录 截面的几何性质 /260

附录A 静矩与形心.....	260
附录B 惯性矩与惯性积.....	262
附录C 平行移轴公式.....	266
附录D 转轴公式.....	270

参考文献 /274

西北工业大学出版社

第一章

静力学基础知识

本章重点

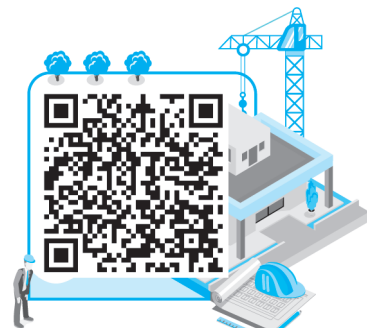
静力学研究作用于物体上力系的平衡。本章将介绍静力学的基本概念和静力学公理，并讨论工程中常见的约束类型，进行约束反力的分析，研究物体及物体系统的受力分析方法以及受力图的画法。

第一节 静力学的基本概念

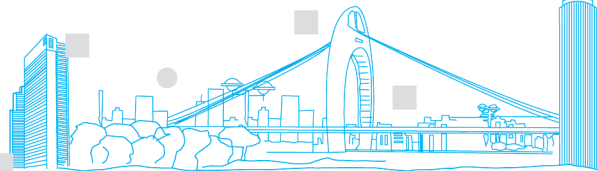
平衡是物体机械运动的一种特殊状态。在静力学中，若物体相对于惯性参考系(如地面)保持静止或做匀速直线运动，则称物体处于平衡。静力学的基本概念、公理及物体的受力分析是研究静力学的基础。

一、刚体

刚体是静力学研究的主要对象。刚体是指在力的作用下其内部任意两点之间的距离保持不变的物体，或者说在力的作用下其大小和形



第一章 PPT 课件



状均不改变的物体。显然,任何物体在力的作用下,都会发生或多或少的变形。但是,有许多物体,如机器和工程结构的构件,在受力后所产生的变形很小,在研究力对物体的平衡问题时,其影响很小,可以忽略不计。这样就可以把物体视为不变形的刚体,使问题的研究得到简化。因此,刚体是一个经过简化和抽象后的理想模型。

需要指出的是,不能把刚体的概念绝对化,是否可以把物体抽象为刚体与所研究的问题的性质有关。若所研究的物体产生变形,而且变形是主要因素,就不能把物体视为刚体,而应视为变形体来分析。例如,在计算工程结构的位移时,就常常要考虑各种因素所引起的变形。

二、力的概念

人类对力的认识是生活和生产实践中产生的。经过长期实践,从感性到理性,人们逐渐建立了力的概念。力是物体间的相互机械作用,这种作用使物体的机械运动状态发生变化,或使物体产生变形。从力的概念可知,力的效应分为两种:一是使物体的机械运动状态发生变化,这种效应称为力的运动效应或者外效应;二是使物体产生变形,这种效应称为力的变形效应或内效应。对于不变形的刚体而言,力只改变其机械运动状态。在静力学范畴内,只研究力的外效应。

力的大小、方向、作用点称为力的三要素。实践表明,力对物体的作用效应,完全取决于这3个要素,若改变这3个要素中的任意1个,都会改变力对物体的作用效应。力是一个既有大小又有方向的量,可以用矢量 F 表示,如图1-1所示。线段的长度(按选定的比例)表示力的大小,线段的方位和箭头表示力的方向,线段的起点或终点表示力的作用点。通过力的作用点并沿着力的方位的直线,称为力的作用线。

在国际单位制中,力的单位用牛[顿](N)或千牛[顿](kN)表示。在工程单位制中,力的单位常用千克力(kgf)或吨力(tf)表示。两者的换算关系为:

$$1 \text{ kgf} = 9.8 \text{ N}$$

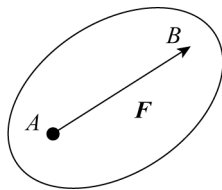
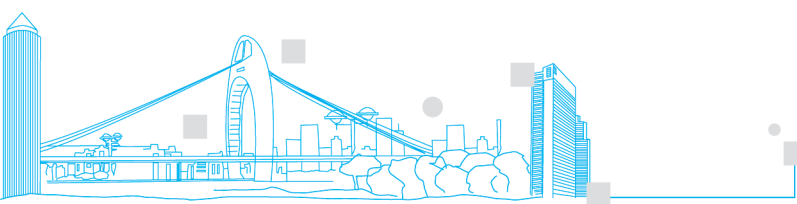


图 1-1 力的作用线

三、力的分类

通常将作用在物体上的力分为两类,即主动力和被动力(约束反力)。使物体运动状态发生改变或使物体有运动趋势的力称为主动力,如重力、风压力、水压力、土压力等。在工程中,通常把作用在结构上的主动力称为荷载或载荷(结构工程中一般称为荷载,机械工程中一般称为载荷)。

按分布情况不同,力可以分为集中力和分布力。力实际上作用在一定的面积上,但是,当作用



面积相对于物体很小时,可近似认为力作用在一个点上。作用于一点的力,称为集中力或集中荷载。例如,汽车轮胎作用在桥面上的压力,轮胎与桥面的接触面积较小,就可以视为集中荷载,如图1-2所示。若力的作用面积较大,则称该力为分布力或分布荷载。例如,建筑物承受的风压力、水工大坝迎水面承受的水压力、挡土墙承受的土压力等,都属于分布力。当荷载连续作用于整个物体的体积上时,该荷载称为体力或体荷载,如物体在重力场中所受到的重力、具有加速度的物体受到的惯性力等。当荷载连续作用于物体的某一表面积上时,称为面力或面荷载,如风、雪、水等对工程构筑物的压力等。当物体所受的力是沿着一条线连续分布且相互平行的力系,称为线力或线荷载。例如,梁的自重可以简化为沿梁的轴线分布的线荷载,如图1-3所示。单位长度上所受的力,称为分布力在该处的荷载集度,通常用 q 表示。体荷载的荷载集度单位为 N/m^3 或 kN/m^3 。面荷载的荷载集度单位为 N/m^2 或 kN/m^2 。线荷载的荷载集度单位为 N/m 或 kN/m 。若荷载集度 q 为常数,则称该分布力为均布荷载,否则称为非均布荷载。



图 1-2 汽车轮胎在桥面的压力



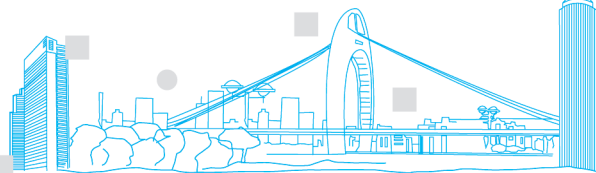
图 1-3 沿梁的轴线分布的线荷载

四、力系

作用在物体上的一群力称为力系。两个力系对同一物体产生的运动效应相同,则称这两个力系互为等效力系。在不改变作用效果的前提下,用一个简单力系代替复杂力系的过程,称为力系的简化或力系的合成。若一个力与一个力系等效,则称此力为该力系的合力,而称力系中的各个力为其合力的分力。合力对物体的作用效果等效于所有分力的作用效果。若作用在物体上的力系使物体处于平衡状态,则称该力系为平衡力系。要使物体处于平衡状态,就必须使作用在物体上的力系满足一定的条件,这些条件称为力系的平衡条件。物体在各种力系作用下的平衡条件在建筑结构、道路桥梁以及机械工程中有着广泛的应用。

五、力学模型与力学简图

对任何实际问题进行力学分析、计算时,都要先将实际问题抽象成为力学模型,然后对力学模



型进行分析、计算。任何力学计算实际上都是针对力学模型进行的。例如，说某些人对这座桥梁进行了力学计算，实际上是指他们对这座桥梁的力学模型进行了计算。显然，将实际问题转化为力学模型是进行力学计算所必需的、重要的、关键的一环，它将直接影响计算过程和计算结果。

在建立力学模型时，要抓住关键、本质的方面，忽略次要的方面。实际问题简化为力学模型，要在多方面进行抽象化处理。这些方面包括：实际材料不可能是完全均匀的，在静力学中常假设材料是均匀的；实际物体受力后总会有变形，在静力学中将物体都看作刚体；实际问题中物体都是三维的，其受力也常为三维的，但当其中某一方向并不重要或可忽略时，可以将其简化为二维问题来处理；实际物体的几何形状可能极复杂，在静力学中常将它们简化为圆柱、圆盘、板、杆或它们的组合等简单的几何形状。物体受到的力可能不是作用于一个几何点上，但当作用面积很小时，可以将其简化为集中力；若分布面积较大，则按分布力处理。上面介绍的仅仅是静力学中建立力学模型常遇到的情况。在力学的其他领域中，建立力学模型常常更复杂。

将实际问题化为力学模型的过程为力学建模。静力学中将物体视为刚体，因此其力学模型可以用简图来表达，这类简图称为力学简图。

第二节 静力学基本公理

公理是人们在生活和生产实践中长期积累的经验总结，又经过实践检验，被确认是符合客观实际的最普遍、最一般的规律。静力学基本公理阐述了力的一些基本性质，是研究力系简化和平衡条件的理论基础。

公理 1 力的平行四边形法则

作用在物体上同一点的两个力，可以合成一个合力。合力作用点也在该点，合力的大小和方向，由以这两个力为边构成的平行四边形的对角线确定，如图 1—4(a) 所示。这种合成方法称为力的平行四边形法则。合力矢等于这两个力矢的矢量和，即

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \quad (1-1)$$

有时为了方便，也可另作一个力三角形，求两汇交力合力的大小和方向（即合力矢），如图 1—4(b)(c) 所示，这种方法称为力的三角形法则。

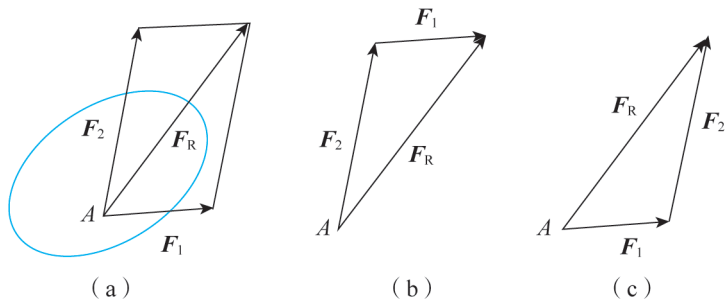
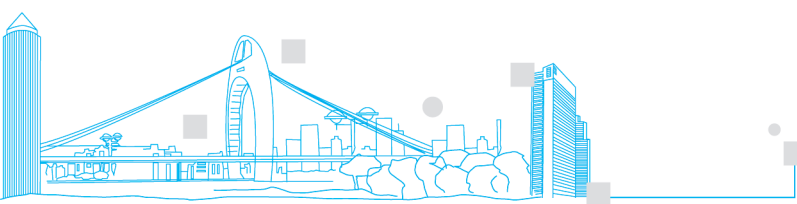


图 1-4 合力的大小与方向

公理 2 二力平衡条件

作用在刚体上的两个力，使刚体保持平衡的必要和充分条件是：这两个力大小相等，方向相反，且作用于同一条直线上，如图 1-5 所示，即

$$F_1 = F_2 \quad (1-2)$$

对于只受两个力作用而处于平衡的刚体，称为二力构件。根据二力平衡条件，二力构件无论其形状如何，所受两个力的作用线必沿着二力作用点的连线。若一根直杆或曲杆只在两点受力且处于平衡状态，则该杆称为二力杆，如图 1-6 所示，二力杆所受两个力的作用线也沿着二力作用点的连线方向。二力平衡条件表述了作用于刚体上最简单力系平衡时所需要满足的条件。

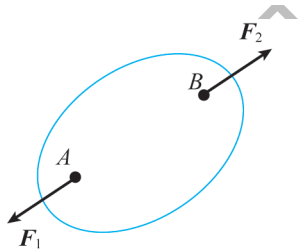


图 1-5 刚体上的力

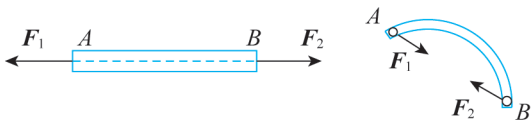


图 1-6 二力杆

公理 3 加减平衡力系原理

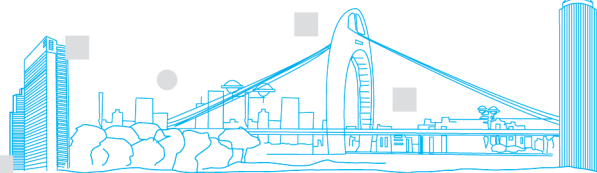
在已知力系上加上或减去任意的平衡力系，不改变原力系对刚体的作用。这个公理是研究力系等效替换的重要依据。

由加减平衡力系原理，可以推导出以下两个重要的结论。

推论 1 力的可传性

作用于刚体上的某点的力，可以沿着它的作用线移到刚体内任意一点，并不改变该力对刚体的作用。

证明：在刚体上的点 A 作用力 F ，如图 1-7(a) 所示。根据加减平衡力系原理，可在力的作用线



上任取一点 B ，并加上两个相互平衡的力 F_1 和 F_2 ，使 $F = -F_1 = F_2$ ，如图 1-7(b) 所示。由于 F 和 F_1 也是一个平衡力系，可以除去，这样就只剩下一个力 F_2 ，如图 1-7(c) 所示。原来的力 F 与 F_2 等效，即原来的力 F 沿其作用线移至点 B 。

由此可见，对于刚体来说，力的作用点不是决定力的作用效应的要素，它已被作用线所代替。因此，作用于刚体上的力的三要素是力的大小、方向和作用线。作用于刚体上的力可沿其作用线移动，这种矢量称为滑移矢量。

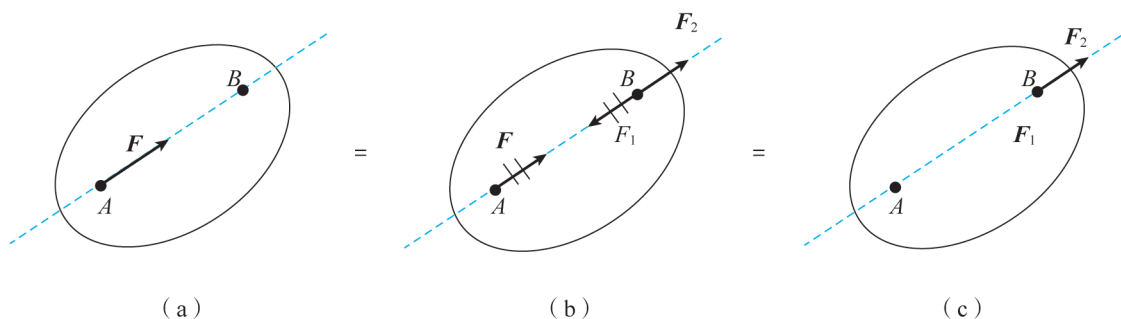


图 1-7 力的作用点

推论 2 三力平衡汇交定理

作用于刚体上三个相互平衡的力，若其中两个力的作用线汇交于一点，则此三力必在同一平面内，且第三个力的作用线通过汇交点。

证明：在刚体的 A 、 B 、 C 三点上，分别作用三个相互平衡的力 F_1 、 F_2 、 F_3 ，如图 1-8 所示。根据力的可传性，将力 F_1 和 F_2 移到汇交点 O ，然后根据力的平行四边形法则，得合力 F_{12} 。根据二力平衡条件，力 F_{12} 和 F_3 平衡。由于两个力平衡必须共线，因此力 F_3 必定与力 F_1 和 F_2 共面，且通过力 F_1 和 F_2 的汇交点 O 。

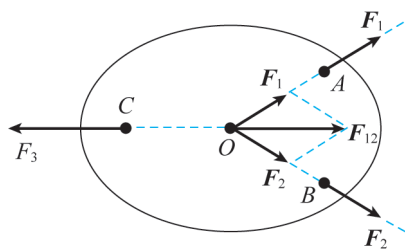


图 1-8 相互平衡的力

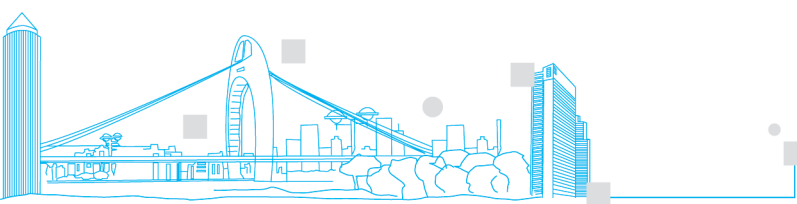
公理 4 作用和反作用定律

作用力和反作用力总是同时存在的，两力的大小相等、方向相反，沿着同一直线，分别作用在两个相互作用的物体上。若用 F 表示作用力， F' 表示反作用力，则

$$F = -F' \quad (1-3)$$

作用和反作用定律概括了自然界中物体间相互作用的关系，无论物体是处于平衡状态还是处于运动状态，也无论物体是刚体还是变形体，该定律都普遍适用。作用力和反作用力总是成对出现的，有作用力必有反作用力。

需要注意的是，虽然作用力与反作用力大小相等、方向相反且沿同一直线，但不能认为这两个力相互平衡。因为这两个力并不作用在同一刚体上，而是作用在两个相互作用的物体上。因此，作用与反作用关系和二力平衡条件有本质的区别。



公理 5 刚化原理

变形体在某力系作用下处于平衡，如将此变形体刚化为刚体，其平衡状态保持不变。

这个公理提供了把变形体看作刚体模型的条件。如图 1—9 所示，绳索在等值、反向、共线的两个拉力作用下处于平衡状态，如将绳索刚化成刚体，其平衡状态保持不变。反之就不一定成立，如刚体在两个等值、反向的压力作用下平衡，若将它换成绳索就不能平衡了。

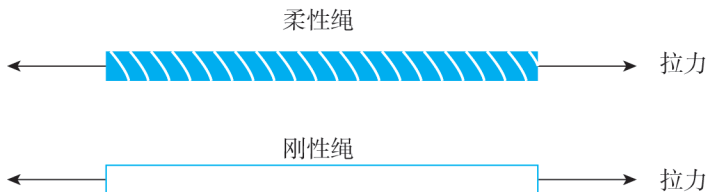


图 1—9 刚体模型

由此可见，刚体的平衡条件是变形体平衡的必要条件，而非充分条件。在刚体静力学的基础上，考虑变形体的特性，可进一步研究变形体的平衡问题。

静力学全部理论都可以由上述 5 个公理推证得到，这既能保证理论体系的完整性和严密性，又能培养读者的逻辑思维能力。

第三节 平面汇交力系的合成与平衡条件

一、力的投影与分解

设力 F 作用在物体上的 A 点，在力所在的平面内建立直角坐标系 xOy ，如图 1—10 所示。将力 F 分别向 x 轴和 y 轴投影。力 F 在 x 轴上的投影为线段 $\overline{ab}$ ，用 F_x 表示。规定：从 a 到 b 的指向与 x 轴正向一致时，投影 F_x 为正；反之为负。若力 F 和 x 轴正向之间的夹角为 α ，则有 $F_x = F \cos \alpha$ 。力在任意坐标轴上的投影是代数量而非矢量。通常取力与坐标轴之间的锐角计算投影的大小，再按上述规定确定其正、负。

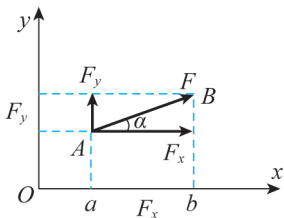
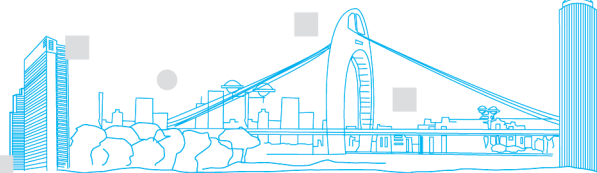


图 1—10 力的平面



同理, 图 1-10 中, 力 F 在 y 轴的投影为 $F_y = F \sin \alpha$ 。投影 F_x 、 F_y 与 F 的大小之间的关系为

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (1-4)$$

根据力的平行四边形法则, 也可将力 F 沿直角坐标轴的方向分解为两个正交分力 F_x 、 F_y , 如图 1-11 所示, 则有

$$F = F_x + F_y \quad (1-5)$$

显然, 在直角坐标系中, 力 F 在坐标轴上的投影与其沿相应轴分力的大小相等, 且投影的正负号与分力的指向相符。

必须注意的是: 力沿坐标轴方向的分力是矢量, 有大小、方向和作用线; 而力在坐标轴上的投影是代数量, 无所谓的方向和作用线。力沿非正交轴的分力的大小并不等于力在相应轴上的投影, 如图 1-11 所示。

如图 1-11 所示, 各力在 x 轴上的投影分别为

$$F_{1x} = F_1 \cos 90^\circ = 0, \quad F_{2x} = -F_2 \cos 0^\circ = -F_2, \quad F_{3x} = F_3 \cos 60^\circ = \frac{1}{2} F_3$$

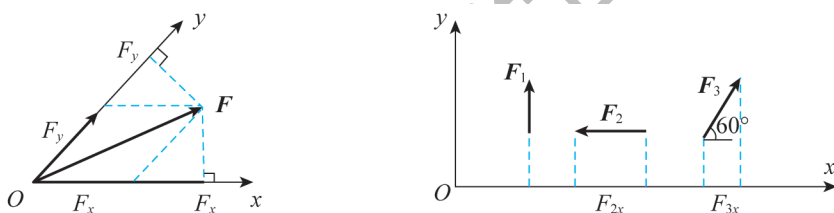


图 1-11 力的投影

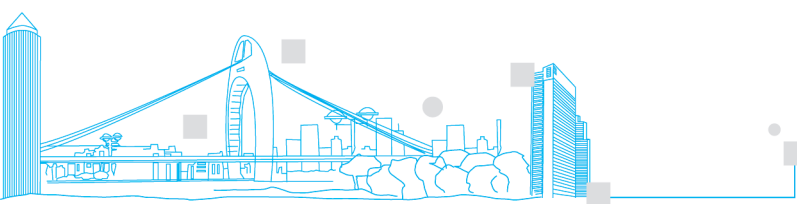
综上所述: 若力的作用线与坐标轴垂直, 则力在该坐标轴上的投影为零; 若力的作用线与坐标轴平行, 则力在该坐标轴上投影的绝对值等于该力的大小。

二、平面汇交力系的合成

如果力系中各力的作用线在同一平面内且均交于一点, 就称该力系为平面汇交力系。图 1-12(a) 所示为屋架的一部分, 在 A 点受到集中荷载 F 作用, 则荷载在杆件 1、2 和 3 上所产生的内力 F_{N1} 、 F_{N2} 和 F_{N3} 。与荷载 F 都作用在屋架所在的平面内, 且交于 A 点, 组成一平面汇交力系, 如图 1-12(b) 所示。

根据平行四边形法则或三角形法则, 可以作图得到杆件内力 F_{N1} 、 F_{N2} 和 F_{N3} 的合力。如图 1-12(c) 所示, 根据三角形法则, 先作出 F_{N1} 和 F_{N2} 的合力 F_1 , 再由 F_1 和 F_{N3} 得到合力 F_{RN} , 该合力即为杆件内力 F_{N1} 、 F_{N2} 和 F_{N3} 的合力。由图 1-12(c) 可见, 合力与各杆内力构成封闭的力多边形。因此, 确定合力的过程还可进一步简化, 即依次将 F_{N1} 、 F_{N2} 和 F_{N3} 各力矢首尾相连, 再作一有向线段由 F_{N1} 的始端连向 F_{N3} 的末端, 该有向线段即为内力的合力矢 F_{RN} , 这一方法又称为力多边形法。

即内力的合力 F_{RN} 等于各内力的矢量和, 即



$$\mathbf{F}_{\text{RN}} = \mathbf{F}_{\text{N1}} + \mathbf{F}_{\text{N2}} + \mathbf{F}_{\text{N3}} \quad (1-6)$$

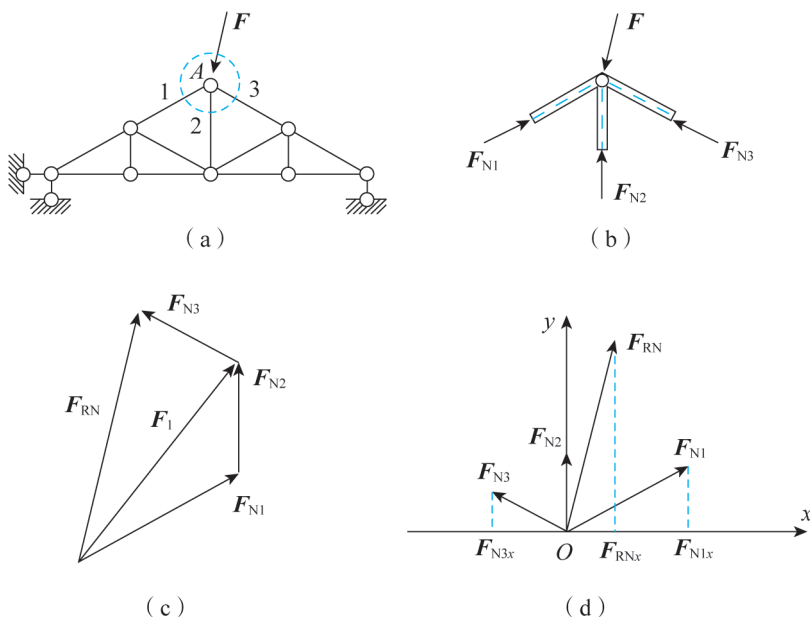


图 1-12 平面汇交力系

合力也可采用投影法计算，将各力向坐标轴投影[见图 1-12(d)]，合力的投影等于各力投影的代数和，即

$$\left. \begin{aligned} F_{\text{RN}x} &= F_{\text{N1}x} + F_{\text{N2}x} + \cdots + F_{\text{N3}x} \\ F_{\text{RN}y} &= F_{\text{N1}y} + F_{\text{N2}y} + \cdots + F_{\text{N3}y} \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$

一般地， n 个力的合力可记为

$$\left. \begin{aligned} F_{\text{Rx}} &= F_{1x} + F_{2x} + \cdots + F_{nx} \\ F_{\text{Ry}} &= F_{1y} + F_{2y} + \cdots + F_{ny} \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

式(1-8)称为合力投影定理，即合力在坐标轴上的投影等于各分力在同一坐标轴上的投影的代数和。合力的大小为 $F_{\text{R}} = \sqrt{F_{\text{Rx}}^2 + F_{\text{Ry}}^2}$ ，合力的方向为 $\tan \alpha = |F_{\text{Ry}} / F_{\text{Rx}}|$ ，其中 α 表示合力与 x 轴所夹的锐角。

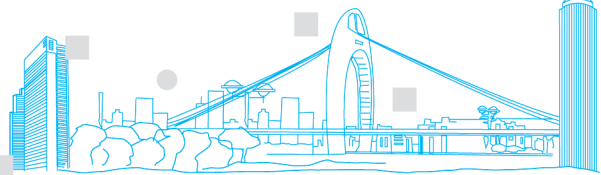
合力投影定理既适用于平面汇交力系，也适用于平面一般力系。

三、平面汇交力系的平衡

刚体若受到力系的作用，其最终的运动状态是由力系的合力决定的。因此，为保持平衡，受到平面汇交力系作用的刚体，所受合力必须等于零，表示为合力在任意两个直角坐标轴上的投影形式，即

$$\left. \begin{aligned} F_{\text{Rx}} &= F_{1x} + F_{2x} + \cdots + F_{nx} = 0 \\ F_{\text{Ry}} &= F_{1y} + F_{2y} + \cdots + F_{ny} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

式(1-9)称为平面汇交力系的平衡条件或平衡方程。它是两个独立方程，可以求解两个未知量。



利用平面汇交力系的平衡条件可以检验刚体在平面汇交力系作用下是否平衡,可以求解处于平衡状态的刚体的任意两个未知力。对于图 1-12(b) 所示结构,各杆内力 F_{N1} 、 F_{N2} 和 F_{N3} 与荷载 F 即构成平衡的汇交力系。

第四节 力对点的矩

一、力矩的概念

如图 1-13 所示,用扳手旋紧螺母时,若作用力为 F ,转动中心 O (称为矩心)到力作用线的垂直距离为 d (称为力臂)。由经验可知,扳动螺母的转动效应不仅与 F 的大小和方向有关,而且与力臂 d 的大小有关,故力 F 对物体转动效应的大小可用两者的乘积 $F \times d$ 来度量。当然,若力 F 对物体的转动方向不同,其效果也不相同。表示力使物体绕某点转动效应的量称为力对点之矩(简称力矩)。

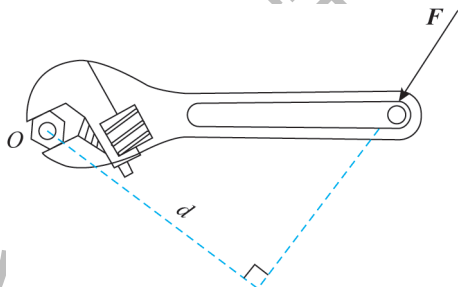


图 1-13 力对点之矩

由大量实例可归纳出力对点之矩的定义:力对点之矩为一代数量,它的大小为力 F 的大小与力臂 d 的乘积,它的正、负号表示力矩在平面上的转向。

一般规定力使物体绕矩心逆时针旋转为正,顺时针为负,并记为

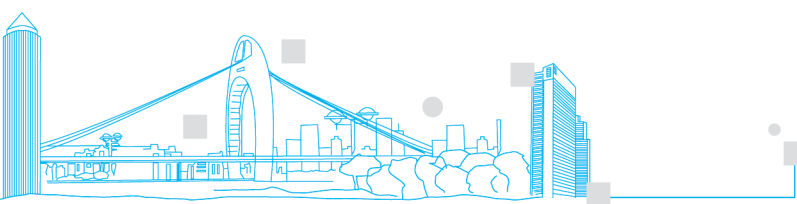
$$M_O(F) = \pm Fd \quad (1-10)$$

由力矩的定义和式(1-10)可知:当力的作用线通过矩心时,力臂值为零,力矩值也必定为零。力沿其作用线滑移时,不会改变力对点之矩的值,因为此时并未改变力、力臂的大小及力矩的转向。力矩的单位为 $N \cdot m$ (牛·米)。

二、合力矩定理

合力矩定理:平面力系的合力对平面上任一点之矩,等于所有各分力对同一点力矩的代数和。由于合力与原力系对物体的作用等效,故有

$$M_O(F_R) = \sum M_O(F) \quad (1-11)$$



上述合力矩定理不仅适用于平面力系, 对于空间力系也同样成立。

在计算力矩时, 有时力臂值未在图上直接标出, 计算亦较复杂。应用这个定理, 可将力沿图上标注尺寸的方向作正交分解, 先分别计算各分力的力矩, 然后相加得出原力对该点之矩。

【例 1-1】 如图 1-14 所示, 圆柱直齿轮的齿面受一啮合角 $\alpha = 20^\circ$ 的法向压力 $F_n = 1 \text{ kN}$ 的作用, 齿面分度圆直径 $d = 60 \text{ mm}$, 试计算力对轴心的力矩。

解 1: 按力对点之矩的定义有: $M_O(F_n) = F_n h = F_n r \cos \alpha = F_n (d/2) \cos \alpha = 28.2 \text{ N} \cdot \text{m}$

解 2: 将 F_n 沿半径的方向分解成一组正交的圆周力 $F_t = F_n \cos \alpha$ 与径向力 $F_r = F_n \sin \alpha$, 按合力矩定理有: $M_O(F_n) = M_O(F_t) + M_O(F_r) = F_t \cdot r + 0 = F_n \cos \alpha (d/2) = 28.2 \text{ N} \cdot \text{m}$

【例 1-2】 如图 1-15 所示, 压路机轮在轮轴处受一切向力的作用。已知 F 、 R 、 r 和 α , 试求此力对轮与地面接触点 A 的力矩。

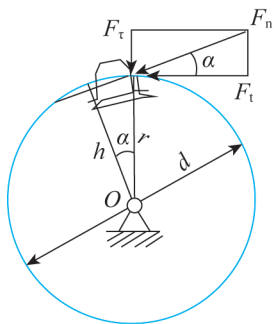


图 1-14 力对轴心的力矩

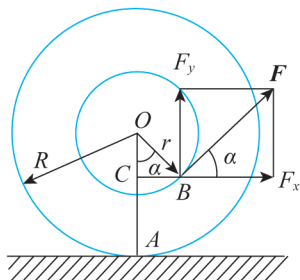


图 1-15 压路机轮在轮轴处受一切向力的作用

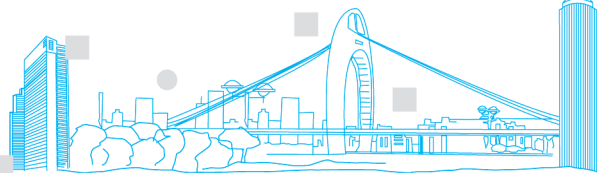
解: 由于力 F 对矩心 A 的力臂未标明且不易求出, 故将 F 在 B 点分解为正交的 F_x 、 F_y , 再应用合力矩定理, 有

$$\begin{aligned} M_A(F) &= M_A(F_x) + M_A(F_y) \\ M_A(F_x) &= -F_x CA = -F_x (OA - OC) = -F \cos \alpha (R - r \cos \alpha) \\ M_A(F_y) &= F_y CB = Fr \sin^2 \alpha \\ M_A(F) &= -F \cos \alpha (R - r \cos \alpha) + Fr \sin^2 \alpha = F(r - R \cos \alpha) \end{aligned}$$

第五节 力偶、力偶矩

一、力对点之矩

力除了能使物体移动外, 还能使物体转动。力对物体的转动效应用力矩表示。



如图 1—16 所示, 用扳手拧螺帽时, 力 F 使扳手绕螺帽中心 O 点发生转动, 其转动效应等于力 F 的大小与 O 点到该力的作用线的垂直距离的乘积 $F \cdot h$ 。此外, 力使扳手绕 O 点转动的方向不同, 作用效果也不同。一般采用带正负号的 $F \cdot h$ 的值表示力 F 使物体绕 O 点的转动效应, 称为力 F 对 O 点之矩, 用 $M_O(F)$ 表示, 即

$$M_O(F) = \pm F \cdot h \quad (1-12)$$

其中, 点 O 称为矩心, h 为力臂, 力 F 与矩心 O 所组成的平面为力矩平面。

规定: 力使物体绕矩心逆时针转动, 力对点之矩为正; 反之为负。在平面力系问题中, 力对点之矩是代数量, 单位是 $\text{N} \cdot \text{m}$ 或 $\text{kN} \cdot \text{m}$ 。

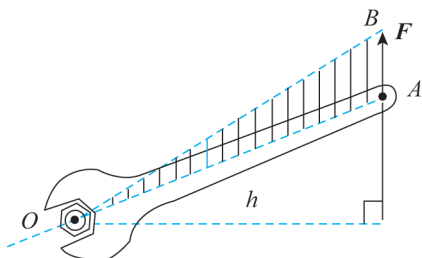


图 1—16 转动效应

力矩是力使物体绕某点的转动效应, 因此, 力矩平面上任意一点都可以当作矩心, 矩心可以在物体上, 也可以在物体之外。同一力对不同点的力矩一般不相同。因此, 必须指明矩心, 力对点之矩才有意义。

力矩具有如下性质:

- (1) 当力的作用线通过矩心时, 力臂为零, 该力对该矩心的力矩等于零。
- (2) 力可以沿其作用线任意滑动, 而不会改变该力对指定点的力矩。

二、合力矩定理

如图 1—17 所示, B 点作用集中力 F , $F=10 \text{ kN}$, $\alpha=30^\circ$, 试计算力 F 对支座 A 的矩。直接计算力 F 的力臂稍显复杂, 若将其分解为水平分力和竖向分力, 则容易得到 $M_A(F_x)=0$, $M_A(F_y)=F_y \cdot AB$, $AB=F \cdot \sin\alpha$, $AB=F \cdot h$, 即

$$M_A(F) = M_A(F_x) + M_A(F_y) = F_x \cdot 0 + F_y \cdot l = F \cdot \sin 30^\circ \cdot 1 = 5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

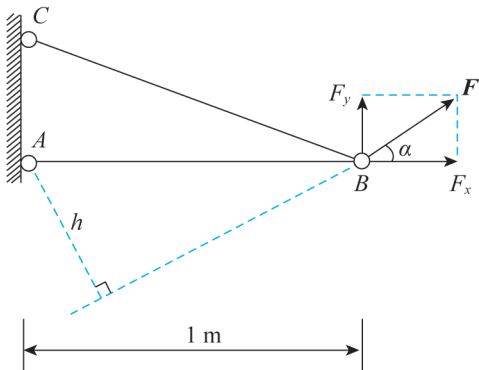
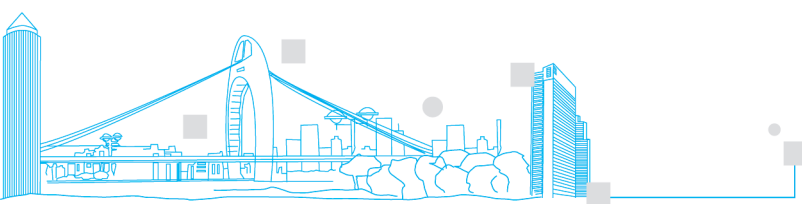


图 1—17 合力矩计算



上式可以推广至由 n 个力组成的平面汇交力系，即

$$M_O(F) = M_O(F_1) + M_O(F_2) + \cdots + M_O(F_n) = \sum_{i=1}^n M_O(F_i) \quad (1-13)$$

式中： $F_1, F_2, \dots, F_n$ 为力 F 沿任意方向的分力。

式(1-13)称为合力矩定理，它表明平面汇交力系的合力对该平面内任一点的力矩等于各分力对同一点之矩的代数和。利用该定理可以计算平面汇交力系对任意点的合力矩。当求解某力对某点之矩较困难时，还可以将该力分解为容易计算力矩(主要是力臂)的分力形式。

三、力偶及其性质

工程与生活中还常常遇到这样的情形，如用两个手指旋转水龙头或钢笔套，用双手转动汽车方向盘或转动丝锥，力产生的效果是使物体只发生转动但不移动。这类作用力的特点是：由大小相等、方向相反的一对力构成，两个力平行但不共线，使物体只发生转动而不移动。由这两个力构成的力系为力偶，如图 1-18 所示，记作 (F, F') 。

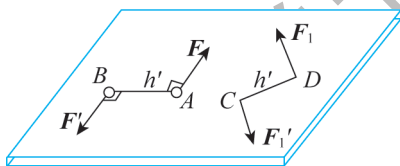


图 1-18 力偶

力偶中二力作用线所决定的平面称为力偶平面，二力作用线间的垂直距离 h 称为力偶臂。

力偶对物体的转动效应取决于力偶中任何一个力的大小与力偶臂的乘积，以及力偶在其作用平面内的转动方向。记作

$$M = \pm F \cdot h = \pm F' \cdot h \quad (1-14)$$

M 称为力偶矩，正、负号表示力偶在其作用平面内使物体的转动方向，与力矩的正、负号规定一致。力偶矩也是代数量，单位为 $\text{N} \cdot \text{m}$ 或 $\text{kN} \cdot \text{m}$ ，也与力矩相同。

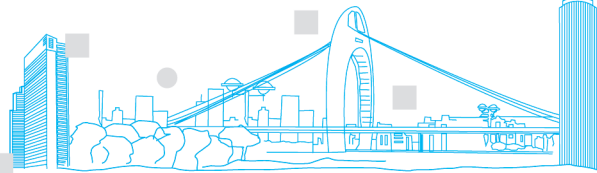
力偶和力都是最基本的力学量。与单独的一个力相比，力偶具有如下性质：

性质一 构成力偶的一对力，其合力为零，但力偶矩不等于零，能使物体转动，不能使物体移动。因此，力偶不是平衡力，也不能用一个力代替。

性质二 力偶对其作用平面内任意点之矩为常数，不随矩心位置而变化。

性质三 同时改变组成力偶的力的大小和力偶臂的长度，只要保持力偶矩不变，力偶可在其作用面内任意移动和转动，原力偶对刚体的作用效应不会改变。

如图 1-18 所示，力的作用点分别由 A, B 移动到 C, D ，力和力臂均发生改变，但力偶矩的大小和方向不变，则对刚体的转动效应不变。又如用两手转动方向盘时，两手可以位于方向盘的任何位置，只要两手作用于方向盘上的力偶矩不变，则它们使方向盘转动的效应就是完全相同的。



可见, 力偶矩是力偶对刚体作用效应的唯一度量。力偶矩常用一段带箭头的弧线表示(ζ), 弧线所在平面代表力偶作用面, 箭头表示力偶在其作用面内的转向, M 表示力偶矩大小, 即 $M = Fh$ 。

四、力偶的合成与平衡

如前所述, 力偶只能产生转动效应。当平面内有若干力偶同时作用时, 也只能产生转动效应, 且总的转动效应等于各力偶转动效应的代数和。因此, 平面力偶系可以合成为一个合力偶, 合力偶矩等于各分力偶之矩的代数和, 即

$$M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n = \sum_{i=1}^n M_i \quad (1-15)$$

若作用于某刚体的平面力偶系的合力偶矩为零, 则该刚体必处于平衡状态, 不发生转动; 反之亦然。因此, 平面力偶系的平衡条件或平衡方程为

$$M = \sum_{i=1}^n M_i = 0 \quad (1-16)$$

第六节 力的平移定理

如图 1-19 所示, 若将作用于刚体上 A 点的力 F 平移到平面上任一点 B 。在 B 点施加一对与 F 等值的平衡力 F' 、 F'' , F' 与 F 平行、等值且同向。 F' 称为平移力, 余下 F 与 F'' 为一对等值反向不共线的平行力, 组成一个力偶, 称为附加力偶, 其力偶矩 M 等于原力对 B 点的力矩, 即

$$M = M_B(F) = \pm F \cdot d$$

于是作用在 A 点上的力 F , 就与作用于 B 点的平移力 F' 和附加力偶 M 的联合作用等效。

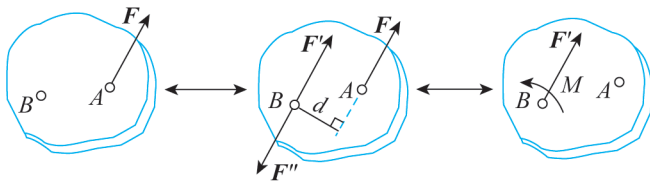
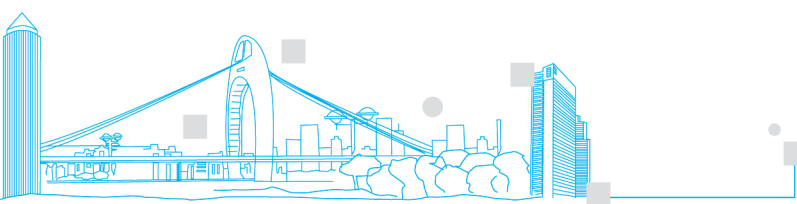


图 1-19 刚体上的力

由此可见, 作用在刚体上的力, 均可平移到同一刚体内任一点, 但同时附加一个力偶, 其力偶矩等于原力对该点之矩, 此即力的平移定理。

力的平移定理表明了力对绕力作用线外的中心转动的物体有两种作用: 一是平移力的作用, 作用在支承处; 二是附加力偶对物体产生的旋转作用。

如图 1-20 所示, 圆周力 F 作用于转轴的齿轮上, 为观察力 F 的作用效应, 将力 F 平移至轴心 O



点, 则有平移力 $\boldsymbol{F}'$ 作用于轴上, 同时有附加力偶 M 使齿轮绕轴旋转。再以削乒乓球为例, 如图 1-21 所示, 分析力 $\boldsymbol{F}$ 对球的作用效应, 将力 $\boldsymbol{F}$ 平移至球心, 得平移力 $\boldsymbol{F}'$ 与附加力偶 M , 平移力 $\boldsymbol{F}'$ 决定球心的轨迹, 而附加力偶则使球产生旋转。

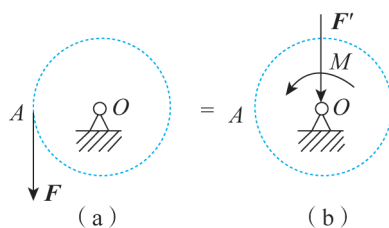


图 1-20 平移力的作用

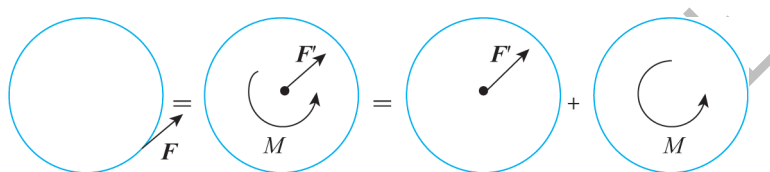


图 1-21 附加力偶的作用

应该指出, 力的平移定理的逆定理同样成立, 即在刚体上同平面的力 $\boldsymbol{F}$ 和力偶 M 可合成为一合力 $\boldsymbol{F}_R$, 只是合力 $\boldsymbol{F}_R$ 与力 $\boldsymbol{F}$ 的作用位置不同而已。

第二章

力系的合成与平衡

本章重点

力系是作用在物体上所有力的总称，当力系中各力处于同一平面时，该力系称为平面力系。本章将介绍力的合成与分解，并探讨力系的合成与平衡，除正确地进行受力分析外，还需要根据力系的特点将实际力系简化成可以处理和计算的形式。

第一节 力的合成与分解

将任意两个汇交力合成为合力，称为力的合成。将任意一个力分解为两个力（分解出的两个力通常称作分力），称为力的分解。

力的合成与分解的方法有几何法和解析法两种。



第二章 PPT 课件

一、几何法

(一) 图解法

1. 力的合成

如图 2-1 (a) 所示, 选取适当的比例尺表示力的大小, 按选定的比例尺作出力 F_{p1} 和 F_{p2} 的大小, 按力的平行四边形法则作出平行四边形 $ABCD$, 量取对角线 AC 和 θ_1 或 θ_2 角即可确定合力 F_R 。

用图解法求合力矢量时, 可以不作如图 2-1 (a) 所示的力的平行四边形, 而采用力的三角形作图法求得。具体做法是: 选取适当的比例尺表示力的大小, 按选定的比例尺依次作出两个力矢量 F_{p1} 和 F_{p2} , 并使两矢量首尾相连, 再从第一个矢量的起点向第二个矢量的终点引矢量 F_R , 它就是按选定比例尺所表示的合力矢量, 如图 2-1 (b) (c) 表示。此方法称为力的三角形法则。

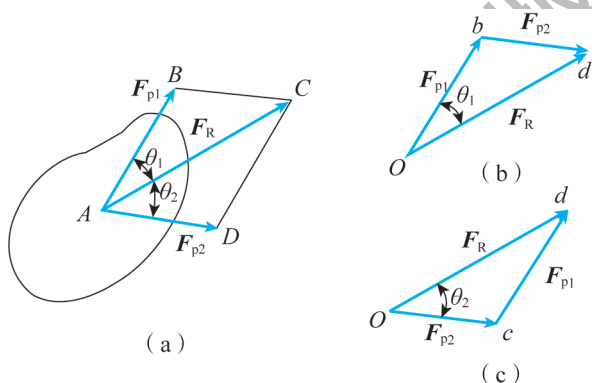


图 2-1 图解法求合力矢量

2. 力的分解

力的分解也可以利用力的平行四边形法则。但是, 以这个力为对角线可以作出无数多个平行四边形, 可得无数组分力。因此, 在求解具体问题时, 可以给出必要的附加条件: ①已知一分力的大小与方向; ②已知两分力的方向。这样, 就可以得到一组确定的分力。

图 2-1 中, F_{p1} 和 F_{p2} 也可以看作是由力 F_R 分解而成的, 当 θ_1 、 θ_2 角取不同的值时, 将有不同的分力 F_{p1} 和 F_{p2} 。当 $\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$ 时, 属于特殊情况, 称为正交分解。

当不给定两个分力的具体方向角 (θ_1 , θ_2) 或其中一个分力的具体大小与方向角 (θ) 时, 通常采用正交分解来进行力的分解。

(二) 数解法

合力的大小与方位角也可利用力的平行四边形的几何关系求解, 利用数学演算来求解问题的方法称为数解法。

具体解法如下: 如图 2-2 所示, 两个分力 F_{p1} 和 F_{p2} 的大小及它们之间的夹角 α 是已知的, 对

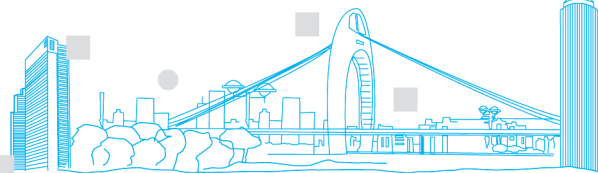


图 2-2 (a) 中平行四边形 $ABCD$ 的一半或图 2-2 (b) 中的三角形应用余弦定理, 可求得合力的大小为

$$F_R = \sqrt{F_{p1}^2 + F_{p2}^2 + 2F_{p1}F_{p2}\cos\alpha} \quad (2-1)$$

再用正弦定理确定合力 F_R 与分力的夹角, 有

$$\frac{F_R}{\sin\alpha} = \frac{F_{p1}}{\sin(\alpha - \varphi)} = \frac{F_{p2}}{\sin\varphi} \quad (2-2)$$

由式 (2-1)、式 (2-2) 可得合力 F_R 的数值与方向角 (φ 或 $\alpha - \varphi$)。

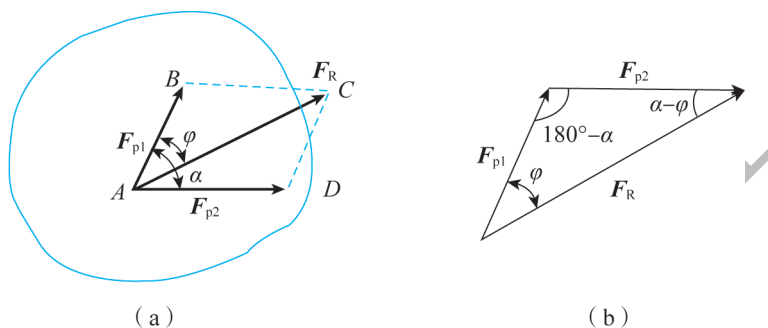


图 2-2 数解法求合力大小

二、解析法

解析法是通过力矢在坐标轴上的投影来分析力的合成与分解的。换句话说, 解析法就是利用正交分解来分析力的合成与分解的。

如图 2-3 所示, 已知力 F_p 与平面内正交轴 x 、 y 的夹角为 α 、 β , 力在某轴的投影等于力的大小乘以力与投影轴正向间夹角的余弦。则力 F_p 在 x 、 y 轴上的投影 (X , Y) 分别为

$$\begin{cases} X = F_p \cos\alpha \\ Y = F_p \cos\beta \end{cases} \quad (2-3)$$

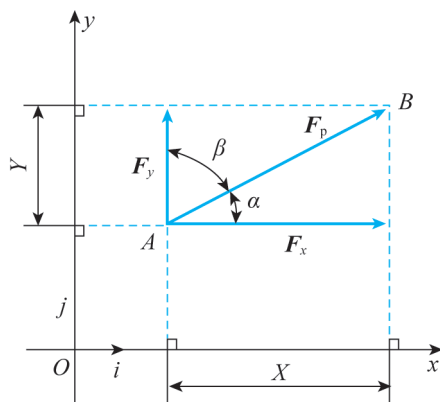


图 2-3 力的投影

力在某轴上的投影为代数量，当力与轴间的夹角为锐角时，其值为正；当力与轴间的夹角为钝角时，其值为负。

当 $\mathbf{F}_p$ 沿正交的 x 、 y 轴分解为两个分力 $\mathbf{F}_x$ 和 $\mathbf{F}_y$ 时，它们的大小恰好等于力 $\mathbf{F}_p$ 在两个轴上的投影 X 和 Y 的绝对值。

$$\left. \begin{aligned} F_x &= F_p \cos \alpha \\ F_y &= F_p \cos \beta \end{aligned} \right\} \quad (2-4)$$

但是当两轴不正交（力不按正交分解）时，上述结论就不成立了，请读者自己推证。

由图 2-3 可知，力 $\mathbf{F}_p$ 沿正交轴 Ox 、 Oy 可分解为两个分力 $\mathbf{F}_x$ 和 $\mathbf{F}_y$ 时，其分力与力的投影之间的关系为

$$\mathbf{F}_x = F_x \mathbf{i}, \quad \mathbf{F}_y = F_y \mathbf{j}$$

由此，力的解析表达式为

$$\mathbf{F}_p = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} \quad (2-5)$$

式中： $\mathbf{i}$ 、 $\mathbf{j}$ —— x 、 y 轴的单位矢量。

显然，已知力 $\mathbf{F}_p$ 在平面内两个正交轴上的投影 F_x 和 F_y 时，该力矢的大小和方向余弦分别为

$$\left. \begin{aligned} F_p &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \\ \cos(F_p, i) &= \frac{F_x}{F_p}, \quad \cos(F_p, j) = \frac{F_y}{F_p} \end{aligned} \right\} \quad (2-6)$$

如图 2-3 所示，式 (2-6) 也可写为

$$\left. \begin{aligned} F_p &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \\ \cos \alpha &= \frac{F_x}{F_p}, \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F_p} \end{aligned} \right\} \quad (2-7)$$

必须注意，力在轴上的投影为代数量，而力沿轴的分量 $\mathbf{F}_x$ 和 $\mathbf{F}_y$ 为矢量，二者不可混淆。

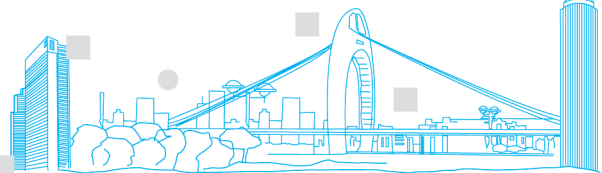
第二节 平面力系的合成

一、平面汇交力系的合成

由图 2-1 (a) 可以看出，合力 $\mathbf{F}_R$ 等于两个力 ($\mathbf{F}_{p1}$, $\mathbf{F}_{p2}$) 的矢量和 (或称几何和)，即

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_{p1} + \mathbf{F}_{p2} \quad (2-8)$$

同样，设平面汇交力系包含 n 个力 ($\mathbf{F}_{p1}$, $\mathbf{F}_{p2}$, $\dots$, $\mathbf{F}_{pn}$)，以 $\mathbf{F}_R$ 表示它们的合力，则有



$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_{p1} + \mathbf{F}_{p2} + \cdots + \mathbf{F}_{pn} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{pi} = \mathbf{F}_p \quad (2-9)$$

式 (2-9) 表示合力 $\mathbf{F}_R$ 等于平面汇交力系中各个力的矢量和 (几何和), 合力的作用线通过汇交点。合力 $\mathbf{F}_R$ 对刚体的作用与原力系对该刚体的作用等效。 $\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{pi}$ 表示 n 个力逐项相加之和, 以后简写为 $\Sigma \mathbf{F}_p$ 。

(一) 平面汇交力系合成的几何法

设在刚体受到平面汇交力系 $\mathbf{F}_{p1}$ 、 $\mathbf{F}_{p2}$ 、 $\mathbf{F}_{p3}$ 、 $\mathbf{F}_{p4}$ 的作用, 如图 2-4 (a) 所示, 各力作用线汇交于 A 点, 根据刚体内部力的可传性, 可将各力沿其作用线移至汇交点 A 处, 如图 2-4 (b) 所示。

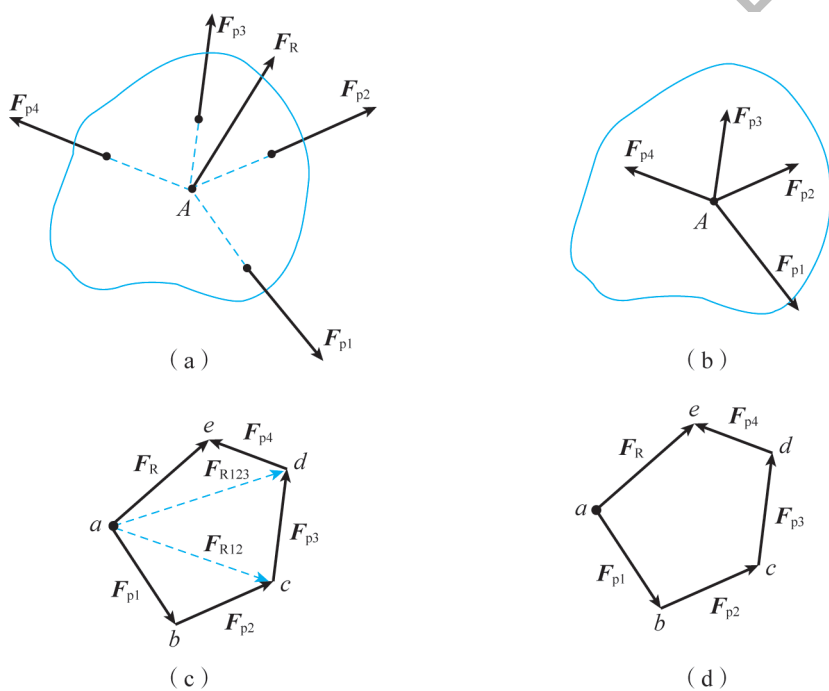


图 2-4 平面汇交力系

为求该力系的合力, 可以用力的平行四边形法则或力的三角形法则将各力依次合成。这里只介绍应用力的三角形法则将该力系中各力依次合成合力的具体步骤: 任取一点 A , 先作力三角形求出 $\mathbf{F}_{p1}$ 与 $\mathbf{F}_{p2}$ 的合力大小与方向 $\mathbf{F}_{R12}$, 同理, 再作力三角形合成 $\mathbf{F}_{R12}$ 与 $\mathbf{F}_{p3}$ 得 $\mathbf{F}_{R123}$, 最后合成 $\mathbf{F}_{R123}$ 与 $\mathbf{F}_{p4}$ 得 $\mathbf{F}_R$, 如图 2-4 (c) 所示。由上述作图结果可见, 为了求合力矢量 $\mathbf{F}_R$, 其实并不需要画出中间的力矢量 $\mathbf{F}_{R12}$ 和 $\mathbf{F}_{R123}$, 只要将力系中各力矢量首尾相连, 构成开口的力多边形 $abcde$, 然后, 由第一个分力矢量的起点向最后一个分力矢量的末端, 引一矢量 $\mathbf{F}_R$ 将力多边形封闭, 力多边形的封闭边矢量 $\mathbf{F}_R$ 即是该力系的合力矢量。这种通过几何作图求合力矢量的方法称为力多边形法, 如图 2-4 (d) 所示。注意利用力多边形法求得的合力的作用线仍应通过原汇交点 A 点, 如图 2-4 (a) 所示的 $\mathbf{F}_R$ 。

上述方法可以推广到包含 n 个力 ($\mathbf{F}_{p1}, \mathbf{F}_{p2}, \dots, \mathbf{F}_{pn}$) 的平面汇交力系中, 并得到如下结论: 平面汇交力系的合力矢量等于力系中各力的矢量和, 合力的作用线通过各力的汇交点, 即得到式 (2-9)。

必须注意, 作力多边形时, 任意变换分力矢量的作图次序, 可得形状不同的力多边形, 但合力矢量 (合力的大小与方向) 并不变。

(二) 平面汇交力系合成的解析法

设由 n 个力组成的平面汇交力系作用于一个刚体上, 以汇交点 O 作为坐标原点, 建立直角坐标系 Oxy , 如图 2-5 (a) 所示。

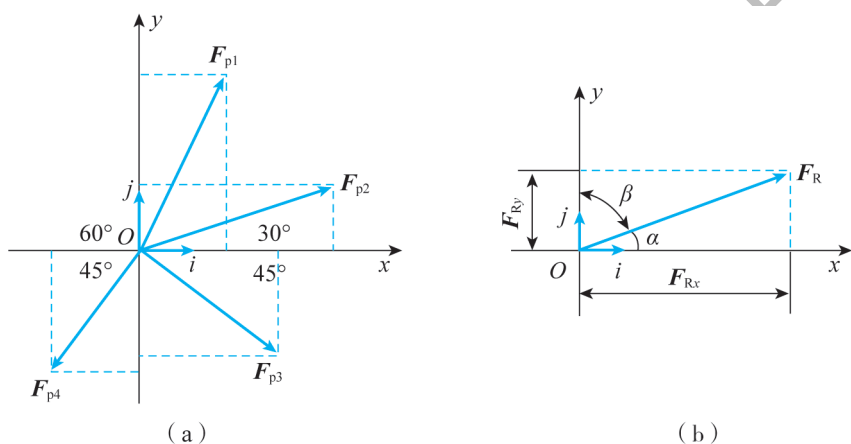


图 2-5 力的直角坐标系

将式 (2-9) 向 x, y 轴投影, 可得

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}_{Rx} &= \mathbf{F}_{x_1} + \mathbf{F}_{x_2} + \dots + \mathbf{F}_{x_n} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{xi} \\ \mathbf{F}_{Ry} &= \mathbf{F}_{y_1} + \mathbf{F}_{y_2} + \dots + \mathbf{F}_{y_n} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{yi} \end{aligned} \right\} \quad (2-10)$$

式中: $\mathbf{F}_{x_i}$ 和 $\mathbf{F}_{y_i}$, $\mathbf{F}_{x_2}$ 和 $\mathbf{F}_{y_2}$, $\dots$, $\mathbf{F}_{x_n}$ 和 $\mathbf{F}_{y_n}$ 分别为各分力在 x 轴和 y 轴上的投影。

由此得合力投影定理: 力系的合力在任一轴上的投影等于各分力在同一轴上投影的代数和。

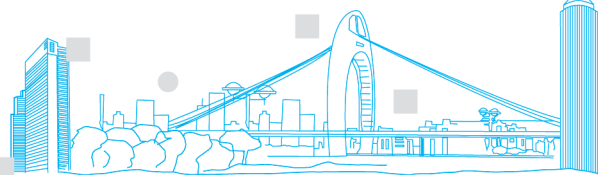
如图 2-5 (b) 所示, 此汇交力系的合力 $\mathbf{F}_R$ 的解析表达式为

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_{Rx} \mathbf{i} + \mathbf{F}_{Ry} \mathbf{j} \quad (2-11)$$

式中: $\mathbf{F}_{Rx}$, $\mathbf{F}_{Ry}$ 分别为合力 $\mathbf{F}_R$ 在 x, y 轴上的投影。

根据式 (2-7) 和式 (2-10), 可求得合力的大小和方向余弦为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}_R &= \sqrt{\mathbf{F}_{Rx}^2 + \mathbf{F}_{Ry}^2} = \sqrt{(\sum \mathbf{F}_{xi})^2 + (\sum \mathbf{F}_{yi})^2} \\ \cos(\mathbf{F}_R, \mathbf{i}) &= \frac{\mathbf{F}_{Rx}}{\mathbf{F}_R} = \frac{\sum \mathbf{F}_{xi}}{\mathbf{F}_R}, \quad \cos(\mathbf{F}_R, \mathbf{j}) = \frac{\mathbf{F}_{Ry}}{\mathbf{F}_R} = \frac{\sum \mathbf{F}_{yi}}{\mathbf{F}_R} \end{aligned} \right\} \quad (2-12)$$



【例 2-1】 求图 2-6 所示平面汇交力系的合力。

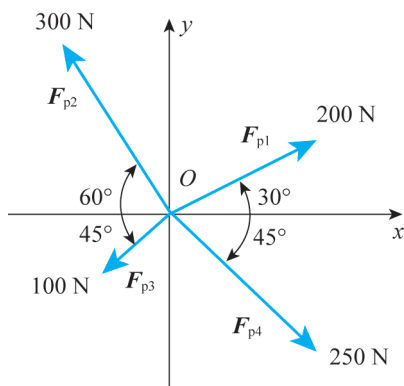


图 2-6 平面汇交力系的合力

解 用式 (2-10) 和式 (2-12) 计算。

$$F_{Rx} = \sum_{i=1}^4 F_{xi} = F_{p1} \cos 30^\circ - F_{p2} \cos 60^\circ - F_{p3} \cos 45^\circ + F_{p4} \cos 45^\circ = 129.3 \text{ N}$$

$$F_{Ry} = \sum_{i=1}^4 F_{yi} = F_{p1} \sin 30^\circ - F_{p2} \sin 60^\circ - F_{p3} \sin 45^\circ + F_{p4} \sin 45^\circ = 112.3 \text{ N}$$

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = \sqrt{(129.3 \text{ N})^2 + (112.3 \text{ N})^2} = 171.3 \text{ N}$$

$$\cos(F_R, i) = \frac{F_{Rx}}{F_R} = \frac{129.3 \text{ N}}{171.3 \text{ N}} = 0.7548$$

$$\cos(F_R, j) = \frac{F_{Ry}}{F_R} = \frac{112.3 \text{ N}}{171.3 \text{ N}} = 0.6556$$

则合力 F_R 与 x 、 y 轴夹角分别为 $\alpha = 40.99^\circ$, $\beta = 49.01^\circ$ 。合力 F_R 的作用线通过汇交点 O 。

二、平面力偶系的合成

设在同一平面内有两个力偶 (F_{p1}, F'_{p1}) 和 (F_{p2}, F'_{p2}) , 它们的力偶臂分别为 h_1 和 h_2 , 如图 2-7 (a) 所示。则各力偶矩分别为

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= F_{p1} h_1 \\ M_2 &= -F_{p2} h_2 \end{aligned} \right\} \quad (2-13)$$

为求它们的合成结果, 在保持力偶矩不变的情况下, 同时改变这两个力偶的力的大小和力偶臂的长短, 使它们具有相同的臂长 h , 并将它们在平面内移转, 使力的作用线重合, 如图 2-7 (b) 所示。于是得到与原力偶等效的两个新力偶 (F_{p3}, F'_{p3}) 和 (F_{p4}, F'_{p4}) , 根据力偶等效条件得

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= F_{p3} h \\ M_2 &= -F_{p4} h \end{aligned} \right\} \quad (2-14)$$

分别将作用在点 A 和 B 的力合成, 得

$$\mathbf{F}_p = \mathbf{F}_{p3} - \mathbf{F}_{p4} \quad (2-15)$$

$$\mathbf{F}'_p = \mathbf{F}'_{p3} - \mathbf{F}'_{p4} \quad (2-16)$$

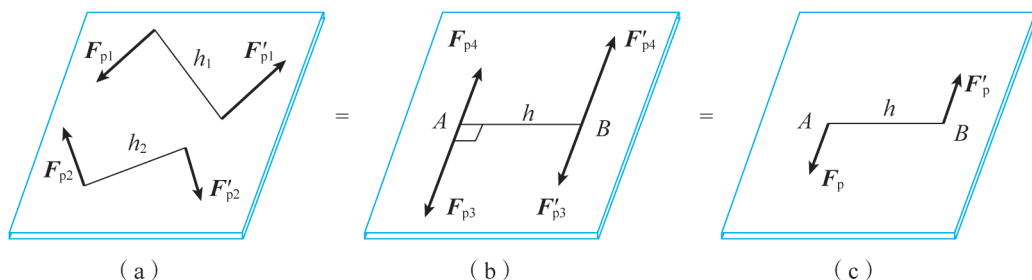


图 2-7 平面力偶系的合成

由于 $\mathbf{F}_p$ 与 $\mathbf{F}'_p$ 的大小是相等的, 所以构成了与原力偶系等效的合力偶 $(\mathbf{F}_p, \mathbf{F}'_p)$, 如图 2-7 (c) 所示, 以 M 表示合力偶的矩, 得

$$M = \mathbf{F}_p h = (\mathbf{F}_{p3} - \mathbf{F}_{p4}) h = \mathbf{F}_{p3} h - \mathbf{F}_{p4} h = M_1 + M_2 \quad (2-17)$$

若作用在同一平面内有 n 个力偶, 则式 (2-17) 可推广为

$$M = M_1 + M_2 + \cdots + M_n = \sum_{i=1}^n M_i \quad (2-18)$$

式 (2-18) 表明: 在同一平面内的任意个力偶可以合成一个合力偶, 合力偶矩等于各个力偶矩的代数和。

三、平面平行力系的合成

在工程实际中, 往往遇到作用在物体同一平面内的力是相互平行的力系, 称为平面平行力系。图 2-8 所示为一塔式起重机。如何求得平面平行力系的合力, 在工程上往往是至关重要的问题。

图 2-9 所示物体在同一平面内作用有 $\mathbf{F}_{p1}$ 、 $\mathbf{F}_{p2}$ 、 $\mathbf{F}_{p3}$ 三个互相平行的力, 那么它们的合力作用线必平行于各力作用线, 合力的大小是三个力的代数和, 即

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_{p1} + \mathbf{F}_{p2} + \mathbf{F}_{p3} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{F}_{pi} = \sum \mathbf{F}_p \quad (2-19)$$

合力作用线的位置: 可在该平面内任选一点为参考点 (见图 2-9 中 O 点), 利用合力矩定理而求得

$$H = \frac{\mathbf{F}_{p1} h_1 + \mathbf{F}_{p2} h_2 + \mathbf{F}_{p3} h_3}{\mathbf{F}_R} = \frac{\sum M_o}{\sum \mathbf{F}_p} \quad (2-20)$$

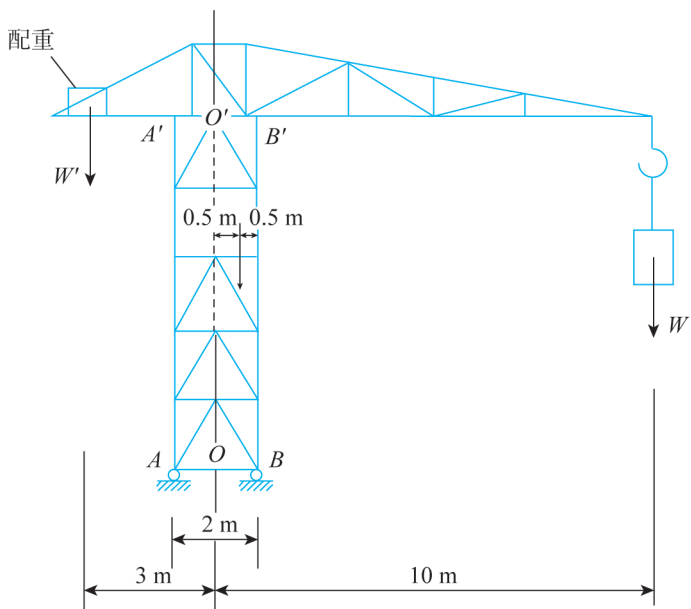
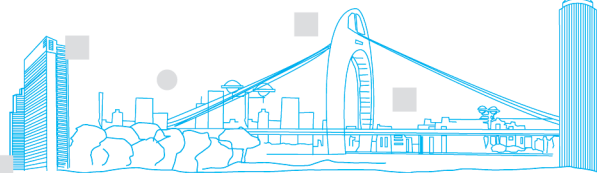


图 2-8 平面力系的合力

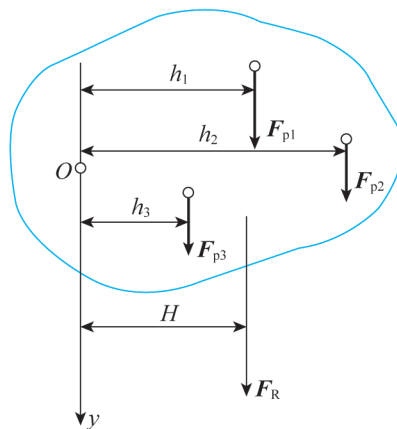


图 2-9 合力

四、平面任意力系的合成

如图 2-10 (a) 所示, 一平面任意力系中 F_{p1} 、 F_{p2} 、 F_{p3} 三个力分别作用在点 A_1 、 A_2 、 A_3 。将该力系向作用平面内任一点 O 简化, 如图 2-10 (b) 所示。 F_{p1} 向 O 点平移, 得力 F'_{p1} 、力偶 M_1 与原 F_{p1} 力等价, 同理, F_{p2} 、 F_{p3} 向 O 点平移, 得 F'_{p2} 、 M_2 与 F'_{p3} 、 M_3 , 故作用在 A_1 、 A_2 、 A_3 的力 F_{p1} 、 F_{p2} 、 F_{p3} 向作用平面 O 点简化后得一汇交力系 F'_{p1} 、 F'_{p2} 、 F'_{p3} 及一平面力偶系 M_1 、 M_2 、 M_3 。由前文可知, 平面任意力系的合成问题可转化为平面汇交力系和平面力偶系的合成问题。平面汇交力系合成一合力矢量, 称为主矢 F_{RO} 。平面力偶系合成一合力偶矩, 称为主矩 M_O , 如图 2-10 (c) 所示。

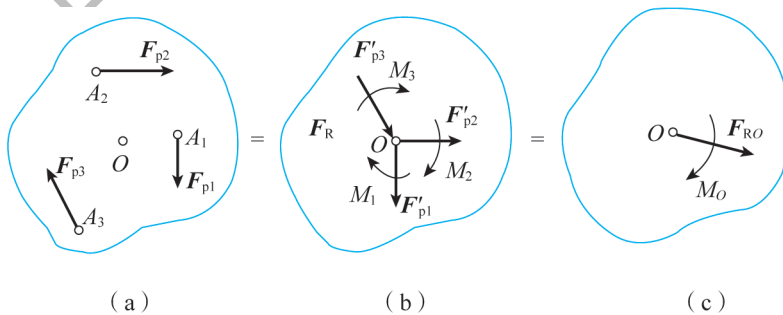


图 2-10 平面任意力系

主矢 F_{RO} 的大小与方向由原力系各力的矢量和决定, 可用力多边形法则的图解法求解, 或用解析法求出。用解析法时, 利用式 (2-10) 和式 (2-12) 计算合力的大小和方向。

$$\left. \begin{aligned} F_{ROx} &= F_{x1} + F_{x2} + \cdots + F_{xn} = \sum_{i=1}^n F_{xi} \\ F_{ROy} &= F_{y1} + F_{y2} + \cdots + F_{yn} = \sum_{i=1}^n F_{yi} \end{aligned} \right\} \quad (2-21)$$

进一步得到主矢量 F_{RO} 的大小为

$$F_{RO} = \sqrt{F_{ROx}^2 + F_{ROy}^2} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n F_{xi}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n F_{yi}\right)^2} \quad (2-22)$$

主矢量 F_{RO} 的方向为

$$\tan \alpha = \frac{\left(\sum_{i=1}^n F_{yi}\right)}{\left(\sum_{i=1}^n F_{xi}\right)} \quad (2-23)$$

因平面力偶系的合力偶矩等于各分力偶矩的代数和, 所以主矩 M_O 为

$$M_O = M_1 + M_2 + \cdots + M_n = M_O(F_{p1}) + M_O(F_{p2}) + \cdots + M_O(F_{pn}) = M_O(F_p) \quad (2-24)$$

由式 (2-24) 可知, 主矩是原力系中各力对简化中心 (O 点) 之矩的代数和。

需要说明的是: 主矢量 F_{RO} 的大小与方向和简化中心 O 点的位置无关, 且在一般情况下不是 F_{p1} 、 F_{p2} 、 F_{p3} 力系的合力, 也即该力系的合力作用线一般情况下不通过 O 点。主矩 M_O 的数值和方向与简化中心 O 点的位置有关, 因为对于不同的简化中心, 其力偶臂是不同的。

已知将一力平移后可用一力与一力偶与之等价, 反之, 也可利用力线平移法则将一力与一力偶合成为一个力。现将图 2-11 (a) 所示力系合成为图 2-11 (c) 所示的主矢量 F_{RO} 与主矩 M_O 再一次进行合成, 得到原力系的合力 F_R 。下面叙述如何求得合力 F_R 的大小、方向和作用线。

将主矩 M_O 用图 2-11 (b) 的 F'_R 、 F_R 两力表示, 要求 $F_R = F'_R = F_{RO}$, F'_R 与 F_{RO} 等值、反向、共线, F'_R 、 F_R 两力的力偶臂为 h , 并保证 $F_R h = M_O$, 这样图 2-11 (a) 中主矢量 F_{RO} 、主矩 M_O 与图 2-11 (b) 力系 F_R 、 F'_R 、 F_{RO} 等价。由于 F'_R 、 F_{RO} 是互相平衡的一对力, 故可去掉, 而只留下图 2-11 (c) 中所示的合力 F_R 。由此可见, F_{p1} 、 F_{p2} 、 F_{p3} 力系合成的最后结果得一合力 F_{RO} , 其大小、方向与主矢量 F_{RO} 相同, 而作用线过 O_1 且平行主矢量 F_{RO} 。

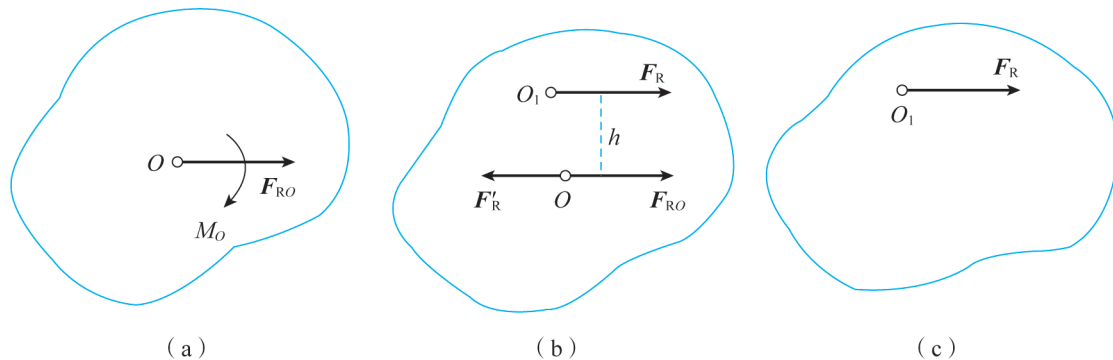
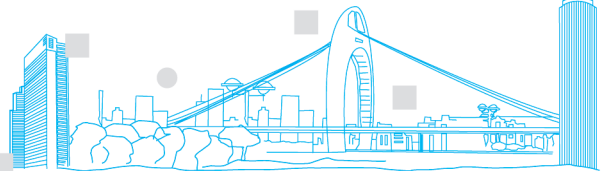


图 2-11 力系合成图



上面讨论的是平面一般力系求合力的一般情况，下面进一步讨论其特殊情况。

(1) $F_{RO} \neq 0, M_O = 0$ 。在这种情况下，由于附加力偶系的合力偶矩等于零，原力系只与一个力等效，因此，原力系简化为一合力。此合力的矢量即为力系的主矢，合力作用线通过简化中心 O 点。

(2) $F_{RO} = 0, M_O \neq 0$ 。在这种情况下，原平面任意力系中各力向 O 点简化后，所得到的汇交力系是一平衡力系，附加力偶系与原力系等效。原力系简化为一合力偶，该力偶的矩就是原力系相对于简化中心的主矩 M_O 。原力系等效于一力偶，因此，主矩与简化中心的位置无关。

(3) $F_{RO} = 0, M_O = 0$ 。在这种情况下，原平面任意力系是一个平衡力系，下面一节将对此进行讨论。

总之，对平面任意力系进行简化，其简化结果为以下三种：合力、合力偶、平衡力系。

第三节 平面力系的平衡

由第二章第二节可知，不同力系合成的结果分别是：平面汇交力系与平面平行力系合成合力；平面力偶系合成合力偶；平面一般力系合成主矢量 F_{RO} 与主矩 M_O 。

由此可知：平面汇交力系、平面平行力系和平面力偶系都属于平面任意力系的特殊情况。因此，关于平面力系的平衡问题，首先研究平面任意力系的平衡问题。

一、平面任意力系的平衡

由上一节讨论，已经知道平面任意力系合成的结果为一矢量 F_{RO} 与主矩 M_O 。因此，平面任意力系平衡的必要与充分条件是主矢量 $F_{RO} = 0$ 与主矩 $M_O = 0$ 。一般情况下将 F_{RO} 用解析方程表示，则平衡方程表达为

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum M_A &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-25)$$

式 (2-25) 是平面任意力系的平衡方程。其中，前两个式子称为投影方程，第三个式子称为力矩方程。这组方程是平面任意力系平衡的基本形式，它表明：平面任意力系平衡的必要与充分条件是力系中各力在直角坐标系 Oxy 两坐标轴上的投影的代数和为零，且力系中各力对坐标平面内任意一点 (A 点) 力矩的代数和也等于零。

除上面的基本方程以外,平面任意力系的平衡方程还可以表达为以下两种形式:

(1) 当 AB 不垂直 Ox 轴时

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_A &= 0 \\ \sum M_B &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-26)$$

式 (2-26) 中的 $\sum M_A = 0$, 表示该力系不能简化为力偶, 但可能简化为一个通过 A 点的合力 F_R 。若该力系同时满足 $\sum M_B = 0$, 则力系的平衡条件还不充分, 因为当 AB 连线与合力 F_R 的作用线相重合时, 力系能同时满足 $\sum M_A = 0$ 与 $\sum M_B = 0$, 而合力还可能不为零, 如图 2-12 所示, 所以还必须要求 AB 连线与 Ox 轴不垂直, 且合力 F_R 在 x 轴上的投影为零, 即 $\sum F_x = 0$ 。因合力 F_R 作用线不垂直于 Ox 轴, 那么, 只有 F_R 为零, 才能满足 $\sum F_x = 0$ 方程。

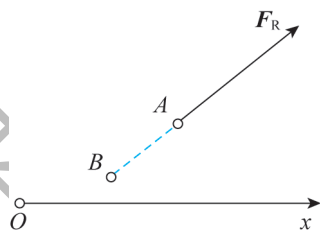


图 2-12 力系作用线

(2) 当 A 、 B 、 C 不在同一直线上时

$$\left. \begin{aligned} \sum F_A &= 0 \\ \sum F_B &= 0 \\ \sum M_C &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-27)$$

式 (2-27) 中 $\sum M_A = 0$, $\sum M_B = 0$, 同样说明该力系不可能简化为力偶, 合力 F_R 作用线若与 AB 连线相重合, 合力 F_R 可不为零。现进一步要求 A 、 B 、 C 三点不在同一直线上时, 如图 2-13 所示, 当该力系同时满足 $\sum M_C = 0$ 时, 才表明原力系必然为平衡力系。那么, 为何强调 C 点必须与 AB 不在同一直线上呢? 因为当 C 点与 AB 在同一直线上时, 即合力作用线过 C 点, 当然 F_R 不为零, 也满足 $\sum M_C = 0$, 这样式 (2-27) 不能表明该力系是平衡的, 即该力系的平衡条件还不充分。现要求 C 点必须不与 AB 在同一直线上, 那么, 只有当合力 F_R 为零时, 才能满足方程 $\sum M_C = 0$ 。

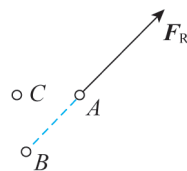
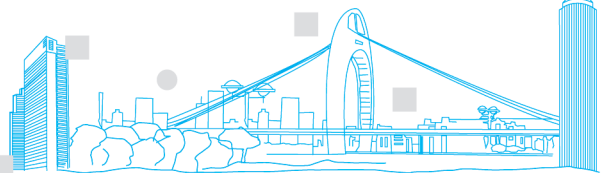


图 2-13 平衡力系

这样, 平面任意力系的平衡条件可由式 (2-25) ~ 式 (2-27) 任意一个方程组来表示。每一组方程均由 3 个彼此独立的方程式组成。只要满足其中一组方程组, 力系就既不能简化为合力, 也不可能简化为力偶, 该力系就必定平衡。因此, 当一个物体受平面任意力系作用而处于平衡状态时, 只能写出 3 个独立方程, 能解 3 个未知量。对于另外写出的投影方程或力矩方程, 只能作为校核计算结果之用, 故称为不独立方程。

式 (2-25) ~ 式 (2-27) 又分别称为一矩式、二矩式和三矩式。



二、平面汇交力系的平衡

(一) 平面汇交力系平衡的几何条件

设刚体在 A 点受到一个由五个力组成的平面汇交力系作用而处于平衡状态, 如图 2-14 (a) 所示。可以用力多边形法则求得其中任意四个力 (如 $\mathbf{F}_{p1}$, $\mathbf{F}_{p2}$, $\mathbf{F}_{p3}$, $\mathbf{F}_{p4}$) 的合力 $\mathbf{F}_R$, 如图 2-14 (b) 所示, 则原力系 $\mathbf{F}_{p1}$ 、 $\mathbf{F}_{p2}$ 、 $\mathbf{F}_{p3}$ 、 $\mathbf{F}_{p4}$ 、 $\mathbf{F}_{p5}$ 与 $\mathbf{F}_R$ 、 $\mathbf{F}_{p5}$ 等效。而原力系是平衡力系, 故 $\mathbf{F}_R$ 与 $\mathbf{F}_{p5}$ 组成的力系也是平衡力系。根据二力平衡条件, $\mathbf{F}_R$ 与 $\mathbf{F}_{p5}$ 应等值、反向、共线。可见 $\mathbf{F}_R$ 与 $\mathbf{F}_{p5}$ 的合力等于零, 也就是原力系的合力等于零。

由此可见, 平面汇交力系平衡的必要和充分条件是该力系的合力等于零, 如用矢量等式表示, 即

$$\mathbf{F}_R = 0 \text{ 或 } \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{pi} = 0 \quad (2-28)$$

如果利用力多边形法则将 $\mathbf{F}_{p1}$ 、 $\mathbf{F}_{p2}$ 、 $\mathbf{F}_{p3}$ 、 $\mathbf{F}_{p4}$ 、 $\mathbf{F}_{p5}$ 依次合成, 则最后一力矢 $\mathbf{F}_{p5}$ 的末端与第一力矢 $\mathbf{F}_{p1}$ 的始端相接, 亦即这五个力矢首尾相接构成一自行封闭的力多边形, 如图 2-14 (c) 所示。此时的力多边形称为封闭的力多边形。于是, 可得如下结论: 平面汇交力系平衡的充分和必要条件是力系的力多边形自行封闭, 这就是平面汇交力系平衡的几何条件。

求解平面汇交力系的平衡问题时可用图解法, 即按比例先画出封闭的力多边形, 然后, 用尺和量角器在图上量得所要求的未知量; 也可根据图形的几何关系, 用三角公式计算出所要求的未知量。

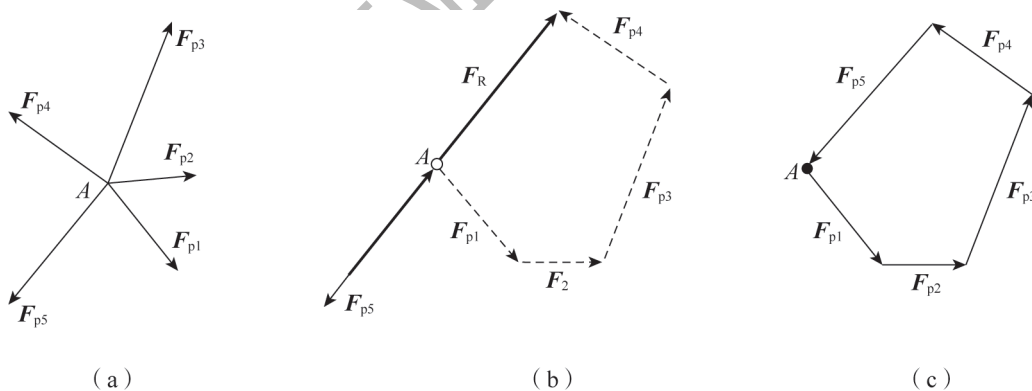


图 2-14 平面汇交力系平衡的几何条件

(二) 平面汇交力系的平衡方程

由第二章第二节可知, 平面汇交力系最后合成的结果为合力, 即

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_{p1} + \mathbf{F}_{p2} + \cdots + \mathbf{F}_{pn} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{pi}$$

当平面汇交力系的合力为零时, 该力系为平衡力系, 即得式 (2-28)

$$\mathbf{F}_R = 0 \text{ 或 } \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{pi} = 0$$

上式也可写成

$$\mathbf{F}_R = \sqrt{(\sum \mathbf{F}_{xi})^2 + (\sum \mathbf{F}_{yi})^2} = 0$$

欲使上式成立, 必须同时满足

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-29)$$

式中: 用 $\sum \mathbf{F}_x$ 来代替 $\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{xi}$, $\sum \mathbf{F}_y$ 来代替 $\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{yi}$ 。

于是, 平面汇交力系平衡的必要和充分条件是各力在两个坐标轴上投影的代数和分别等于零, 或者说平面汇交力系的合力为零。式 (2-29) 称为平面汇交力系的平衡方程。这是两个独立的方程, 可以求解两个未知量。

比较式 (2-29) 与式 (2-25) 可以看出: 式 (2-29) 比式 (2-25) 少一个方程式 $\sum M_A = 0$, 这主要是因为汇交力系只能合成一个合力。因此, 式 (2-25) 可以简化成式 (2-29)。

由此可知, 平面汇交力系平衡是平面任意力系平衡中的一个特例。

三、平面平行力系的平衡

平面平行力系是平面任意力系的一种特殊情况。在平面平行力系中力的作用线都在同一平面内且彼此平行。它的平衡条件可由平面任意力系的平衡条件导出。

设有平面平行力系 $\mathbf{F}_{p1}$ 、 $\mathbf{F}_{p2}$ 、 $\dots$ 、 $\mathbf{F}_{pn}$ 作用于物体上 (见图 2-15), 若取 x 轴与各力垂直, 则不论力系是否平衡, 每一个力在 x 轴上的投影恒等于零, 即 $\sum F_x = 0$ 。则平行力系的独立平衡方程个数只有两个, 即式 (2-25) 改写为

$$\left. \begin{aligned} \sum \mathbf{F}_y &= 0 \\ \sum M_o(\mathbf{F}_p) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-30)$$

这就是平面平行力系平衡方程的基本形式。两个独立的平衡方程可以求解两个未知数。同理, 也可以得到平面平行力系平衡方程的二力矩形式, 即式 (2-26) 改写为

$$\left. \begin{aligned} \sum M_A(\mathbf{F}_p) &= 0 \\ \sum M_B(\mathbf{F}_p) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-31)$$

式中: A, B 连线不与平行力的作用线平行。

在应用平衡方程解平衡问题时, 要根据实际情况, 选取适当

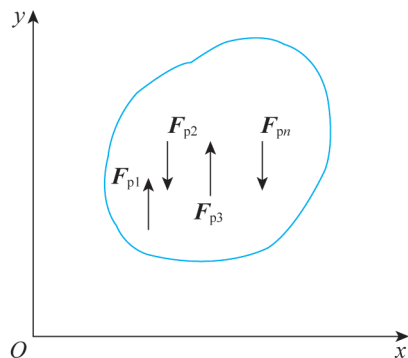
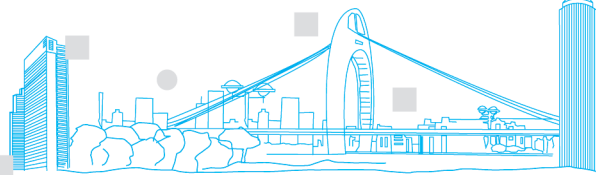


图 2-15 平面平行力系的平衡



的坐标轴的力矩中心。选取的坐标轴应尽可能与力系中多数未知力的作用线平行或垂直，而力矩中心应选在两个未知力的交点上。总之，选择的原则应使每个方程中未知量尽可能少，最好每个方程中只含有一个未知量，这样可以使计算大为简化。列平衡方程时要注意力的投影以及力对点之矩的正负号。

四、平面力偶系的平衡

由合成结果可知，力偶系平衡时，其合力偶的矩等于零。因此，平面力偶系平衡的必要和充分条件是所有各力偶矩的代数和等于零，即

$$\sum_{i=1}^n M_i = 0 \quad (2-32)$$

式 (2-32) 称为平面力偶系的平衡方程，应用平面力偶系的平衡方程可以求解一个未知量。

第四节 空间力系的合成

工程中常见物体所受各力的作用线并不都在同一平面内，而是空间分布的，这样的力系称为空间力系。研究这些结构时，需用空间力系的简化和平衡条件。

一、力的分解与合成

对于一个空间的力系，如果应用力的平行四边形法则，将会使问题的研究变得抽象和烦琐，因此，研究这类问题时一般应用解析法。利用解析法时需要选定一个坐标系，并把力系中的力向坐标轴进行投影。将力 $\mathbf{F}_p$ 作为对角线作直角平行六面体，以三个棱边为空间直角坐标系的三个坐标轴，或将三个棱边分别平行于三个坐标轴，力 $\mathbf{F}_p$ 在空间的方向可由力 $\mathbf{F}$ 与坐标轴 x 、 y 、 z 的正向夹角 α 、 β 、 γ 来完全确定（见图 2-16）。如果已知力 $\mathbf{F}$ 的大小以及其方向角 α 、 β 、 γ ，那么力在三个坐标轴上的投影分别等于力的大小乘以对应方向角的余弦，即

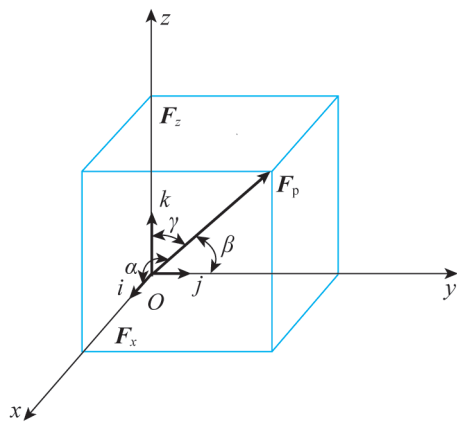


图 2-16 力的分解与合成

$$\left. \begin{aligned} F_x &= F_p \cos \alpha \\ F_y &= F_p \cos \beta \\ F_z &= F_p \cos \gamma \end{aligned} \right\} \quad (2-33)$$

这种方法称为直接投影法或方位角法。

如图 2-17 所示, 当力 F_p 与坐标轴 Ox , Oy 间的夹角 α 、 β 不易确定时, 可以先把力投影到坐标平面 xOy 上, 得到力 F_{xy} , 然后再把这个力投影到 x 、 y 轴上, 这种方法在工程中经常应用, 称为间接投影法或二次投影法。在图 2-17 中, 已知角 γ 和 θ , 则力在三个坐标轴上的投影为

$$\left. \begin{aligned} F_x &= F_p \sin \gamma \cos \theta \\ F_y &= F_p \sin \gamma \sin \theta \\ F_z &= F_p \cos \gamma \end{aligned} \right\} \quad (2-34)$$

若力 F_p 在三个坐标轴上的投影已知, 则此力的大小和方向余弦分别为

$$\left. \begin{aligned} F_p &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \\ \cos \alpha &= \frac{F_x}{F_p} \\ \cos \beta &= \frac{F_y}{F_p} \\ \cos \gamma &= \frac{F_z}{F_p} \end{aligned} \right\} \quad (2-35)$$

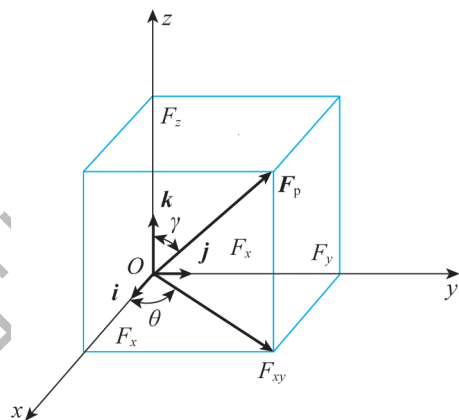


图 2-17 间接投影法

若以 i 、 j 、 k 分别表示沿 x 、 y 、 z 三个坐标轴正向的单位向量, 则力 F_p 沿空间直角坐标系的解析表达式为

$$\mathbf{F}_p = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y + \mathbf{F}_z = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \quad (2-36)$$

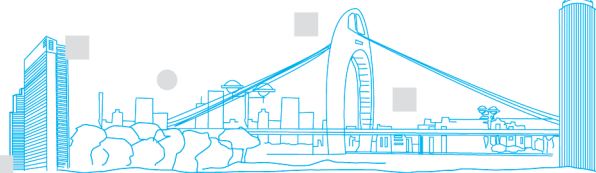
二、力矩与力偶矩矢

在平面力系中, 人们建立了力对点的矩的概念。力对点的矩与力对通过矩心且垂直于力作用面的轴的矩在平面力系中是一致的。如果从空间角度来分析, 由于力的方向是任意的, 所以力对点的矩和力对通过该点的轴的矩很多时候是不同的。现在来分别研究它们以及它们之间的关系。

(一) 力对轴的矩

实际工程中, 经常遇到刚体绕固定轴转动的情形, 力对轴的矩是度量力对绕定轴转动刚体的作用效果的物理量。如图 2-18 所示, 门上 A 点作用有一个力 F_p , 使其绕固定轴 z 转动。现将力 F_p 分解为平行于 z 轴的分力 F_z 和垂直于 z 轴的分力 F_{xy} 。由经验可知, 分力 F_z 不能使静止的门绕 z 轴转动, 故力 F_z 对 z 轴的矩为零, 只有分力 F_{xy} 才能使静止的门绕 z 轴转动。现用符号 $M_z(F_p)$ 表示力 F_p 对 z 轴的矩, 点 O 为平面 xOy 与 z 轴的交点, h 为点 O 到力 F_{xy} 作用线的距离。因此, 力 F_p 对 z 轴的矩就是分力 F_{xy} 对点 O 的矩, 即

$$M_z(F_p) = M_O(F_{xy}) = \pm F_{xy}h \quad (2-37)$$



于是, 力对轴的矩的定义如下: 力对轴的矩是力使刚体绕该轴转动效果的度量, 是一个代数量, 其绝对值等于该力在垂直于该轴的平面上的投影对于这个平面与该轴的交点的矩的大小。其正、负号如下确定: 从 z 轴正端来看, 若力的投影使物体绕该轴按逆时针转动, 则取正号, 反之取负号。力对轴的矩的单位为 $\text{N} \cdot \text{m}$ 。

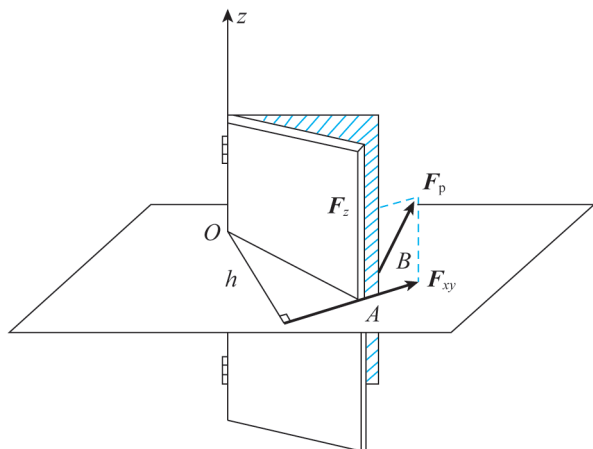


图 2-18 力对轴的矩

从力对轴之矩的定义可知, 当力与轴相交 (此时 $h=0$) 或者力与轴平行 (此时 $F_{xy}=0$) 时, 力对轴的矩等于零, 也就是说当力与轴在同一平面时, 力对该轴的矩等于零。

力对轴的矩也可用解析式表示。设力 $\mathbf{F}_p$ 在三个坐标轴上的投影分别为 $\mathbf{F}_x$ 、 $\mathbf{F}_y$ 、 $\mathbf{F}_z$, 力作用点 A 的坐标为 (x, y, z) , 如图 2-19 所示。根据合力矩定理, 得

$$M_z(\mathbf{F}_p) = M_O(F_{xy}) = M_O(F_x) + M_O(F_y)$$

即

$$M_z(\mathbf{F}_p) = xF_y - yF_x$$

同理可以得到其余两式。于是有

$$\left. \begin{aligned} M_x(\mathbf{F}_p) &= yF_z - zF_y \\ M_y(\mathbf{F}_p) &= zF_x - xF_z \\ M_z(\mathbf{F}_p) &= xF_y - yF_x \end{aligned} \right\} \quad (2-38)$$

式 (2-38) 是计算力对轴之矩的解析式。

(二) 力对点的矩

在平面力系中, 力对点的矩由下列两个因素决定: ①力矩的大小; ②力矩的转向。因此, 用代数量就可以描述它。但是, 在空间力系中, 决定力对点的因素除了上述两个因素之外, 还有一个决定因素, 即此力与力矩中心所组成的平面 (力矩作用面) 在空间的方位。方位不同, 即使力矩的大小一样, 对刚体的作用效果也将截然不同。例如, 作用在飞机尾部铅垂

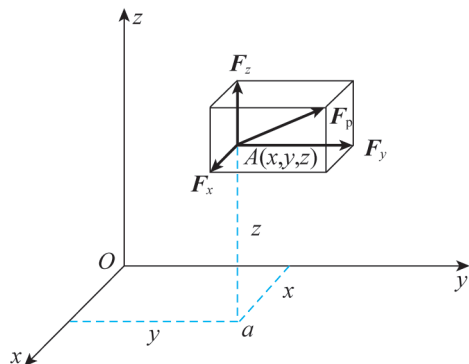


图 2-19 力对轴的矩解析

舵和水平舵上的力,对飞机绕重心转动的效果不同,前者能使飞机转弯,而后者则能使飞机发生俯仰。显然,用代数量来表示空间力对点的矩是完全不够的。因此,需要引入一个矢量来表示它,这个矢量称为力矩矢 $\mathbf{M}_O(\mathbf{F}_p)$ 。矢量的模 $|M_O(\mathbf{F}_p)| = F_p h = 2A_{\triangle OAB}$; 矢量的方位和该力与矩心组成的平面的法线的方位相同。矢量的指向按以下方法确定: 从这个矢量的末端来看,物体由该力所引起的转动是逆时针转向,如图 2-20 所示。

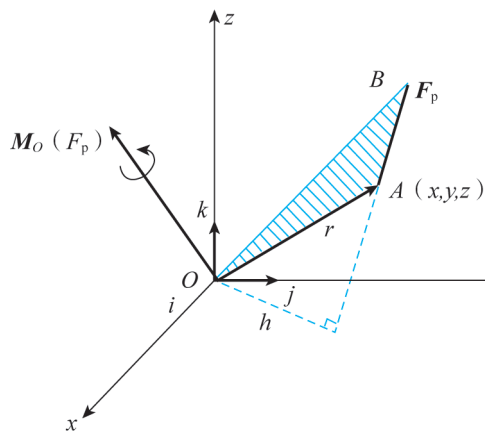


图 2-20 力矩的转向

由图 2-20 可知,以 r 表示力 $\mathbf{F}_p$ 作用点 A 的矢径,则矢积 $r \times \mathbf{F}_p$ 的模等于 $\triangle OAB$ 面积的两倍,其方向与力矩矢 $\mathbf{M}_O(\mathbf{F}_p)$ 一致,因此可得

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}_p) = r \times \mathbf{F}_p \quad (2-39)$$

式 (2-39) 为力对点的矩的矢积表达式,即力对点的矩矢等于矩心到该力作用点的矢径与该力的矢量积。

若以矩心 O 为原点,设力作用点 A 的坐标为 (x, y, z) ,力在三个坐标轴上的投影分别为 $\mathbf{F}_x$ 、 $\mathbf{F}_y$ 、 $\mathbf{F}_z$,令 $\mathbf{i}$ 、 $\mathbf{j}$ 、 $\mathbf{k}$ 分别为坐标轴 x 、 y 、 z 正方向的单位矢量,则有

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}_p) = r \times \mathbf{F}_p = (yF_z - zF_y)\mathbf{i} + (zF_x - xF_z)\mathbf{j} + (xF_y - yF_x)\mathbf{k} \quad (2-40)$$

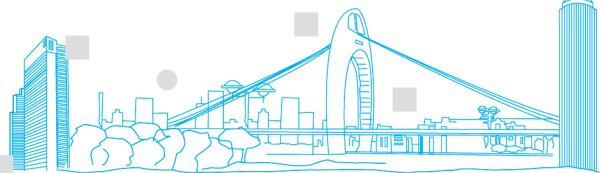
单位矢量 $\mathbf{i}$ 、 $\mathbf{j}$ 、 $\mathbf{k}$ 前面的 3 个系数,分别表示力对点的矩矢 $\mathbf{M}_O(\mathbf{F}_p)$ 在 3 个坐标轴上的投影,即

$$\left. \begin{aligned} [M_O(\mathbf{F}_p)]_x &= yF_z - zF_y \\ [M_O(\mathbf{F}_p)]_y &= zF_x - xF_z \\ [M_O(\mathbf{F}_p)]_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \right\} \quad (2-41)$$

应该指出,由于力矩矢量 $\mathbf{M}_O(\mathbf{F}_p)$ 的大小和方向都与矩心 O 的位置有关,故力矩矢的始端必须在矩心 O ,不可任意挪动,这种矢量称为定位矢量。

(三) 力对点的矩与力对通过该点的轴的矩的关系

比较式 (2-38) 和式 (2-41),可得



$$\left. \begin{aligned} [M_O(F_p)]_x &= M_x(F_p) \\ [M_O(F_p)]_y &= M_y(F_p) \\ [M_O(F_p)]_z &= M_z(F_p) \end{aligned} \right\} \quad (2-42)$$

式 (2-42) 说明：力对点的矩矢在通过该点的某轴上的投影，等于力对该轴的矩。

(四) 力偶矩矢

由平面力偶理论知道，平面力偶对刚体的作用效应由力偶的两个要素决定，即力偶矩的大小和旋转方向。而空间力偶是由 3 个要素决定，即力偶矩的大小、力偶的转向和力偶作用面在空间的方位。这 3 个要素可以用一个矢量表示，矢量的长度表示力偶矩的大小，矢量的方位与力偶作用面的法线方位相同，矢量的指向与力偶转向的关系服从右手螺旋法则。即若以力偶的转向为右手螺旋的转动方向，则螺旋前进的方向即为矢的指向，或从矢的末端看去应看到力偶的转向是逆时针转向（见图 2-21）。这样，这个矢量就完全包括了上述 3 个因素，称它为力偶矩矢，记作 $\mathbf{M}$ 。由此可知，空间力偶对刚体的作用完全由力偶矩矢所决定。应该指出，由于力偶可以在同平面内任意转移，并可搬移到平行平面内，而不改变它对刚体的作用效果，故力偶矩矢可以平行搬移，且不需要确定矢的初端位置。这样的矢量称为自由矢量。

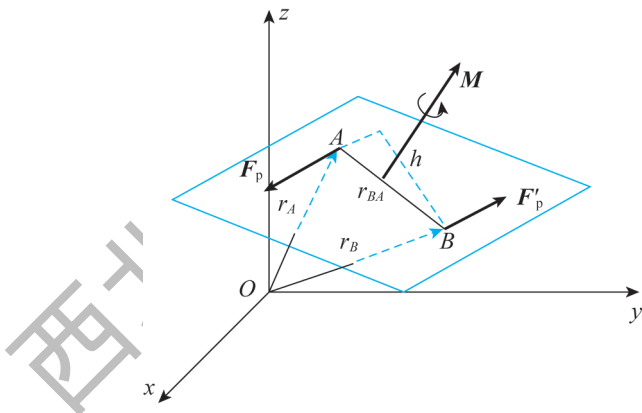


图 2-21 力偶的转向

根据力偶矩矢的概念可知，凡力偶矩矢相等的力偶均为等效力偶。这就是空间力偶等效定理。这一结果表明空间力偶不仅可以平移到与其作用面平行的任意平面上而不改变力偶对刚体的作用效果；也可以同时改变力与力偶臂的大小，只要力偶矩矢的大小不变、方向不变，其对刚体的作用效果就相同。因此，力偶矩矢是空间力偶作用效果的唯一度量。

第五节 空间力系的平衡

一、空间任意力系向一点简化

现在来讨论空间任意力系的简化问题。与平面任意力系的简化方法一样，也要应用力的平移定理，依次将作用于刚体上的每个力向简化中心平移，同时附加一个相应的力偶。这样，原来的空间任意力系可以由空间汇交力系和空间力偶系两个简单力系等效替换。如图 2-22 (a) 所示，刚体上作用一空间任意力系 $\mathbf{F}_{p1}$ 、 $\mathbf{F}_{p2}$ 、 $\cdots$ 、 $\mathbf{F}_{pn}$ 。选任一点 O 为简化中心，应用力的平移定理，将各力平行移动到点 O ，同时附加相应的附加力偶。于是，原平面任意力系等效变换为一个作用于点 O 的空间汇交力系 $\mathbf{F}'_{p1}$ 、 $\mathbf{F}'_{p2}$ 、 $\cdots$ 、 $\mathbf{F}'_{pn}$ 和一个空间附加力偶系[见图 2-22 (b)]，这些附加力偶矩矢分别为 $\mathbf{M}_1$ 、 $\mathbf{M}_2$ 、 $\cdots$ 、 $\mathbf{M}_n$ ，其中

$$\mathbf{F}'_{pi} = \mathbf{F}_{pi} \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_{pi})$$

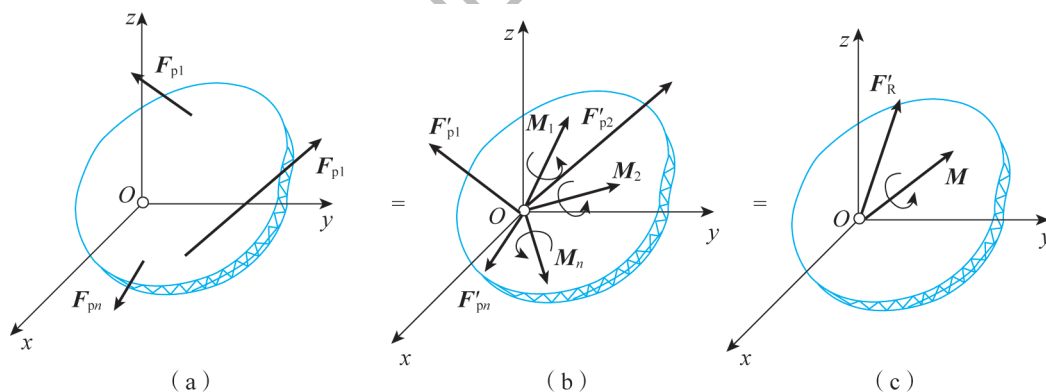


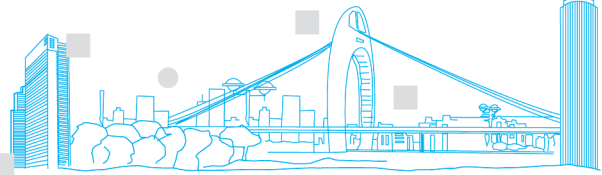
图 2-22 空间任意力系的简化

作用于点 O 的空间汇交力系可以合成为一个力 $\mathbf{F}'_R$ [见图 2-22 (c)]，此力的作用线通过点 O ，其大小和方向等于力系的主矢，即

$$\mathbf{F}'_R = \mathbf{F}'_{p1} + \mathbf{F}'_{p2} + \cdots + \mathbf{F}'_{pn} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{pi} \quad (2-43)$$

力系的主矢与简化中心的选择无关。给定坐标系 $Oxyz$ ， $\mathbf{i}$ 、 $\mathbf{j}$ 、 $\mathbf{k}$ 分别为沿 x 轴、 y 轴和 z 轴的单位向量，则力系主矢 $\mathbf{F}'_R$ 的解析表达式为

$$\mathbf{F}'_R = \mathbf{F}'_{Rx} + \mathbf{F}'_{Ry} + \mathbf{F}'_{Rz} = \sum F_x \mathbf{i} + \sum F_y \mathbf{j} + \sum F_z \mathbf{k} \quad (2-44)$$



于是, 主矢 $\mathbf{F}'_R$ 的大小和方向余弦分别为

$$F'_R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2 + (\sum F_z)^2} \quad (2-45)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(F'_R, i) &= \frac{\sum F_x}{F'_R} \\ \cos(F'_R, j) &= \frac{\sum F_y}{F'_R} \\ \cos(F'_R, k) &= \frac{\sum F_z}{F'_R} \end{aligned} \right\} \quad (2-46)$$

空间分布的力偶系可合成为一力偶。以 $\mathbf{M}_O$ 表示其力偶矩矢, 它等于各附加力偶矩矢的矢量和, 又等于力对于点 O 之矩的矢量和, 即原力系对点 O 的主矩为

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_{pi}) \quad (2-47)$$

力系的主矩与简化中心的选择有关。力系对点 O 的主矩的解析表达式为

$$M_O = \sum_{i=1}^n (y_i F_{zi} - z_i F_{yi})i + \sum_{i=1}^n (z_i F_{xi} - x_i F_{zi})j + \sum_{i=1}^n (x_i F_{yi} - y_i F_{xi})k \quad (2-48)$$

式中: x_i 、 y_i 、 z_i 分别为力 $\mathbf{F}_{pi}$ 作用点的坐标。

由力对点之矩与力对轴之矩的关系, 可知主矩 M_O 在三个坐标轴上的投影为

$$\left. \begin{aligned} M_{Ox} &= [\sum \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_p)]_x = \sum M_x(\mathbf{F}_p) \\ M_{Oy} &= [\sum \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_p)]_y = \sum M_y(\mathbf{F}_p) \\ M_{Oz} &= [\sum \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_p)]_z = \sum M_z(\mathbf{F}_p) \end{aligned} \right\} \quad (2-49)$$

力系对点 O 的主矩 M_O 的大小和方向余弦分别为

$$M_O = \sqrt{[\sum M_x(\mathbf{F}_{pi})]^2 + [\sum M_y(\mathbf{F}_{pi})]^2 + [\sum M_z(\mathbf{F}_{pi})]^2} \quad (2-50)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(M_O, i) &= \frac{M_{Ox}}{M_O} = \frac{\sum M_x(\mathbf{F}_p)}{M_O} \\ \cos(M_O, j) &= \frac{M_{Oy}}{M_O} = \frac{\sum M_y(\mathbf{F}_p)}{M_O} \\ \cos(M_O, k) &= \frac{M_{Oz}}{M_O} = \frac{\sum M_z(\mathbf{F}_p)}{M_O} \end{aligned} \right\} \quad (2-51)$$

于是可得结论如下: 空间任意力系向任一点 O 简化, 可得一力和一力偶。这个力的大小和方向等于该力系的主矢, 作用线通过简化中心 O ; 这个力偶的矩矢等于该力系对简化中心 O 的主矩。主矢与简化中心的位置无关, 主矩一般与简化中心的位置有关。

二、空间任意力系的平衡方程

在空间任意力系作用时刚体处于平衡状态的必要和充分条件是：力系的主矢等于零；对于任一点的主矩等于零，即

$$\left. \begin{aligned} F'_R &= 0 \\ M_O &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-52)$$

由式 (2-42) 和式 (2-47)，可将上述平衡条件写成空间任意力系平衡方程的解析形式，即

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum F_z &= 0 \\ \sum M_x(F_p) &= 0 \\ \sum M_y(F_p) &= 0 \\ \sum M_z(F_p) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-53)$$

于是空间任意力系平衡的必要和充分条件是：所有各力在三个坐标轴中每一个轴上的投影的代数和等于零，以及这些力对于每一个坐标轴的矩的代数和也等于零。

与平面力系相同，空间力系的平衡方程也有其他的形式，如四矩式、五矩式和六矩式。但是多矩式平衡方程在使用时需要附加相应的限制条件。由于各种形式的限制条件过于复杂，在此不一一论述。使用时可不考虑这些限制条件，只需要灵活选取力矩轴，保证每一个平衡方程都能够求解出一个未知量，以此确定方程的独立性。式 (2-53) 是在直角坐标系下导出的，但在解题过程中，列平衡方程时投影轴可以不必互相垂直，力矩轴也不一定是坐标轴，而且投影轴和力矩轴可以不重合。

空间任意力系作用下的刚体平衡时有 6 个独立的平衡方程，可解 6 个独立的未知量。从空间任意力系的普遍平衡规律中可以导出特殊情况的平衡规律，例如空间平行力系、空间汇交力系和空间力偶系等的平衡规律。现以空间平行力系为例来研究一下其平衡方程，其余情况读者可自行推导。

设刚体上作用有空间平行力系 F_{p1} 、 F_{p1} 、 $\dots$ 、 F_{pn} (见图 2-23)，取坐标系 $Oxyz$ 的 Oz 轴与各力作用线平行，则空间任意力系作用下刚体的 6 个平衡方程式 (2-53) 中，有 3 个成为恒等式，即

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum M_z(F_p) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

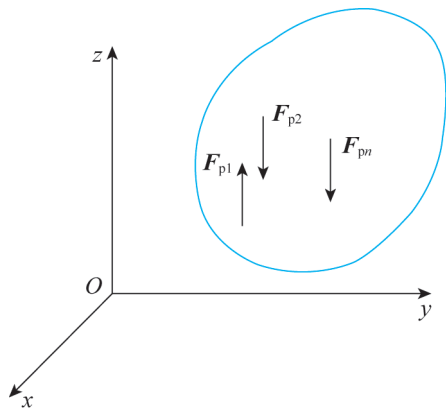
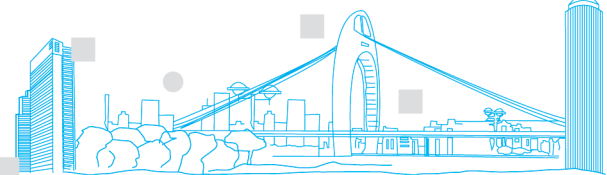


图 2-23 空间平行力系



因此，空间平行力系只有三个平衡方程，即

$$\left. \begin{aligned} \sum F_z &= 0 \\ \sum F_x(F_p) &= 0 \\ \sum M_y(F_p) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-54)$$

式 (2-54) 就是空间平行力系作用下刚体的平衡方程。3 个独立的平衡方程可以解 3 个未知量。

西北工业大学出版社