目 录

第一章　绪　论

第一节　工程力学的研究对象

力学和工程学的结合，促成了工程力学的形成和发展。无论是在历史悠久的土木工程、水利工程、机械工程和船舶工程中，还是在后起的航空航天工程、核技术工程、生物工程中，工程力学都有着广泛的应用。力学的发展使汽车发动机效率提高了约1／3。仅以小轿车为例，全世界每年节省燃料费约 2 000 亿美元，排气污染减少了 90%以上。力学解决了各种飞行器的空气动力学性能问题、推进器动力学问题、飞行稳定性和操纵性问题及结构和材料的强度问题等。

20 世纪以来，工程力学发展的标志性成就有：人类载人航天技术、高速磁悬浮列车、跨江大桥、超高层建筑和巨型水利枢纽等。可以预见，在未来的科技发展中，工程力学仍将展示出永恒与旺盛的生命力并发挥巨大的影响。

工程力学所研究的物体大多数是由固体材料做成的，而固体材料在外力作用下都会发生变形，故称为变形固体。变形固体在外力作用下所产生的物理现象是各种各样的，为了便于研究，常常舍弃那些与所研究的问题无关或关系不大的特征，而只保留其主要特征，并通过做出某些假设将所研究的对象抽象成一种“理想化模型"。在工程力学中，将物体抽象成两种计算模型：刚体和理想变形固体。

刚体是指在外力作用下，大小和形状都不变的物体。

理想变形固体是指对实际变形体的材料做出一些假设，使其理想化，以便于研究和计算。

理想变形固体材料的基本假设有：

（1）连续性假设。即认为材料无间隙地分布于物体所占的整个空间中。根据这一假设，物体内因受力和变形而产生的内力和位移都将是连续的，因而可以表示为各点坐标的连续函数，从而有利于建立相应的数学模型。

（2）均匀性假设 。即认为物体内各点处的力学性能都是一样的，不随点的位置而变化。按此假设，从构件内部任何部位所切取的微元体，都具有与构件完全相同的力学性能。同样，通过试样所测得的材料性能，也可用于构件内的任何部位。应该指出，对于实际材料，其基本组成部分的力学性能往往存在不同程度的差异，但是，由于构件的尺寸远大于其基本组成部分的尺寸，按照统计学观点，仍可将材料看成是均匀的。

（3）各向同性假设。即认为材料沿各个方向上的力学性能都是相同的。我们把具有这种属性的材料称为各向同性材料，如低碳钢、铸铁等。在各个方向上具有不同力学性能的材料则称为各向异性材料，如由增强纤维 (碳纤维、玻璃纤维等) 与基体材料 (环氧树脂、陶瓷等)

制成的复合材料。本书仅研究各向同性材料的构件。按此假设，我们在计算中就不用考虑材料力学性能的方向性，而可沿任意方位从构件中截取一部分作为研容对象，

第二节　工程力学的研究方法

自然界与各种工程中涉及机械运动的构件往往是很复杂的，在外力作用下构件的变形和破坏形式也是各不相同的，这就要求我们在分析研究其机械运动时，必须抓其主要因素，忽略一些次要因素的影响，对构件进行合理的简化，从而抽象出比较合乎实际的力学模型。

当所研究的构件运动范围远远超过其本身的几何尺寸时，构件的形状和大小对运动的影响很小，这时可将其抽象为只有质量而无体积的“质点”，由若干相互之间有一定联系的质点组成的系统，称为“质点系”。刚体可视为永不变形的质点系。

实际构件在力的作用下或多或少地都会发生变形，但是，对于受力后变形很小，或者虽有变形但不影响整体的平衡或运动规律的构件，变形只是次要因素，可忽略不计，将其简化为“刚体”。但要研究构件的力与变形之间的规律时，不管变形多小，不能再将其简化为刚体，必须将其简化为“可变形固体”。在本书中，第一章和第三章讨论构件机械运动的一般规律，研究模型为刚体或刚体系统(当不考虑尺寸时视作质点)，第二章讨论构件的强度、刚度和稳定性问题，研究模型为可变形固体。

第三节　工程力学的任务

工程力学是研究物体机械运动的一般规律和工程构件的设计计算原理的科学。通常包括静力学和材料力学等内容。静力学主要研究力系的规律，特别是力系的平衡规律及其工程应用，在静力学中，通常将变形体简化为刚体。而材料力学主要研究构件(等截面直杆)的设计计算原理及其应用，此时通常采用理想变形体模型。为了保证机械或工程结构能正常工作，要求每一个构件都具有足够的承受载荷的能力，即需满足强度、刚度和稳定性的要求。

所谓强度指构件抵抗破坏（断裂或产生显著塑性变形）的能力。构件具有足够的强度是保证其正常工作最基本的要求。例如，构件工作时发生意外断裂或产生显著塑性变形是不允许的。

所谓刚度指构件抵抗弹性变形的能力。为了保证构件在载荷作用下所产生的变形不超过许可的限度，必须要求构件具有足够的刚度。例如，如果机床主轴或床身的变形过大，将影响加工精度；齿轮轴的变形过大，将影响齿与齿间的正常啮合等。

所谓稳定性指构件保持原有平衡形式的能力。在一定外力作用下，构件突然发生不能保持其原有平衡形式的现象，称为失稳。构件工作时产生失稳一般也是不允许的。例如，桥梁结构的受压杆件失稳将可能导致桥梁结构的整体或局部塌毁。因此，构件必须具有足够的稳定性。

构件的设计，必须符合安全、适用和经济的原则。材料力学的任务是：在保证满足强度、刚度和稳定性要求的前提下，以最经济的代价，为构件选择适宜的材料，确定合理的形状和尺寸，并提供必要的理论基础和计算方法。一般说来，强度要求是基本的，只是在某些情况下才提出刚度要求。至于稳定性问题，只是在特定受力情况下的某些构件中才会出现。

第四节　工程力学的研究内容

工程力学是一门研究物体机械运动规律和构件承载能力的科学。所谓机械运动规律，是指物体在空间的位置随时间而变化的规律；而构件承载能力，是指构件在外荷载作用下具有能正常工作而不失效或破坏的能力。对于工程类专业，与其相关的是投入工业生产的大量的机器、设备等结构物在机械运动中的安全工作。因此，工程力学必然以结构物及其组成构件为研究对象，研究它们在受到外荷载作用时所具有的平衡、运动、变形、失效等各个方面的基本规律，从而得出相关的计算方法、合理的设计，再按一定的技术规则进行制造，然后实现有目的的工程应用。也就是说，工程力学实际面对的是工程，最终服务的也是工程。

工程力学的内容主要分为三篇，包括刚体静力学、变形体静力学、运动学和动力学。

第一篇刚体静力学，主要是研究物体在力系作用下平衡的规律，而平衡是物体机械运动的一种特殊情形。物体要平衡，作用在物体上的力需满足一定的条件。刚体静力学所研究的，实际上就是建立平衡所需满足的条件。这时我们所取的力学模型就是把物体视为刚体。因此，研究刚体所作用的力的平衡的科学，称为刚体静力学。

第二篇变形体静力学，变形体静力学中的力学模型是变形体。变形体静力学，主要是研究构件的强度、刚度和稳定性，为构件选取合理的截面形状、尺寸以及适当的材料提供理论基础。

第三篇运动学和动力学，如果作用在物体上的力系不平衡，物体的运动状态将发生改变。物体的运动规律不仅与物体的受力情况有关，而且与物体本身的惯性和原来的运动状态有关。这一篇所研究的运动学是从几何的观点来研究描述物体空间位置随时间的变化规律。工程上有大量的结构物作机械运动，如电机转子的回转运动、压缩机活塞的往复直线运动以及其他更复杂的机械运动等。对于每种机械运动的设计，如机床的运行，必须设计一套适当的传动机构，才能使电动机带动主轴和刀架共同运转而实现对工件的加工。可见，研究机械运动规律时，运动学理论不可或缺。至于这一篇所研究的动力学，即要对物体的机械运动进行全面的分析，研究物体的运动与作用于物体的力之间的关系，从而建立物体机械运动的普通规律。

动力学的形成与工业生产的发展密切相关，特别是现代科学技术与制造业迅速发展的今天，动力学更侧重于工程技术的应用，如高度自动化机械的动力计算、航空航天飞行器上新型材料高速高温气流下的应用力学问题以及制造业中机械的动态性质，这些都要用到动力学理论。

第五节　工程力学的研究方法

工程力学的研究方法主要有三种：理论分析方法、实验方法和计算机方法。

一、理论分析方法

静力学中的物体受力分析、力系简化与力系等效、力系平衡等这些理论分析方法使工程。结构的静力分析成为可能。

而材料力学也主要依据内力分析、变形和应力计算等理论分析方法来解决构件的强度、刚度和稳定性问题。

此外，工程力学还面临着许多新设计思想和新结构形式的挑战，这些也需要运用理论分析方法进行探索性研究和设计。

必须指出，上述许多理论方法是建立在一些基本假使之上的，其计算结果的可靠性往往还需要实验方法来验证。

二、实验方法

工程力学结构分析的步骤是首先确定计算模型，然后选择理论方法进行结构的强度、刚度和稳定性计算。在此过程中，计算模型的合理与否往往需要通过实验检验，比如需要通过实验来测定材料的力学性能，甚至最终工程力学的理论分析结果还得通过实验来检验。还有一些尚无理论分析结果的问题，也必须借助于实验的手段来解决。所以，实验研究和理论分析都是工程力学解决问题的重要手段。

三、计算机方法

现代计算机技术的飞速发展和广泛应用，为工程力学开辟了新的研究方法，使得所能解决的问题要比以前单纯地运用理论分析方法和实验方法广泛得多、深刻得多。现在即便是传统的理论分析方法和实验方法，往往也需要计算机协助完成。比如计算机方法可以帮助推导理论公式，计算机应用专用软件可以进行工程结构计算、分析和设计，计算机还可以采集实验数据和分析实验结果。在工程设计和研究的前沿领域，利用计算机技术可以方便地进行模拟分析和研究。

第二章　力学基础知识

第一节　力 和 力 系

一、力的概念

力的概念产生于人类从事的生产劳动之中。当人们用手握、拉、掷及举起物体时，由于肌肉紧张而感到力的作用，这种作用广泛存在于人与物及物与物之间。例如，奔腾的水流能推动水轮机旋转，锤子的敲打会使烧红的铁块变形，等等。可见，力作用于物体将产生两种效果：一种是使物体机械运动状态发生变化，称为力的外效应；另一种则是使物体产生变形，称为力的内效应。由于静力学以刚体为研究对象，故在第一篇中只讨论力的外效应。

综上所述，在静力学的范畴内，力可定义为：力是物体间的相互机械作用，这种作用将引起物体机械运动状态发生变化。

1. 力的三要素

实践证明，力对物体的作用效应，是由力的大小、方向和作用点的位置所决定的，这三个因素称为力的三要素 (见图 2-1（a）)。例如，用扳手拧螺母时，作用在扳手上的力，因大小不同，或方向不同，或作用点不同，它们产生的效果就不一样。

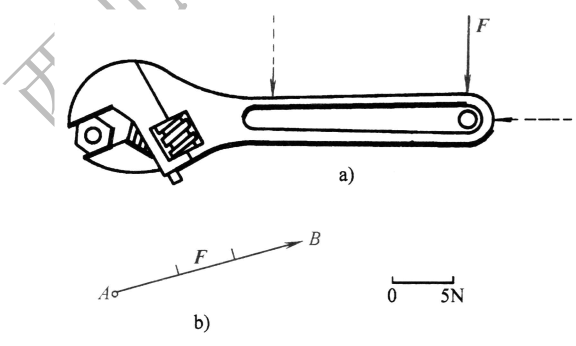


图 2–1

2. 力的单位

在国际单位制中，力的单位为 N(牛 [顿]) 或 kN(千牛 [顿])。

3. 力的矢量表示

数学上，将有大小、有方向的物理量称为矢量，其运算则为矢量运算 (论证从略)，所以

力在图示及运算中，就被视为矢量。力在图示时，常用一个带箭头的线段表示 (见图 2-1（b）)，线段长度 *AB* 按一定比例代表力的大小，其起点或终点表示力的作用位置。此线段的延伸称为力的作用线。用黑体字 (如 **F**) 代表力矢，并以明体字母 *F* 代表力的大小。

二、力的性质

作用于同一物体上的一群力，总称为力系。按照力系中各力作用线在空间的分布之不同形式，可分为：

（1）汇交力系。各力作用线汇交于一点。

（2）平行力系。各力作用线相互平行。

（3）一般力系。各力作用线既不相交于一点，又不互相平行。

按照各力作用线是否位于同一平面内，上述三种力系各自又可分为平面力系和空间力系，如平面汇交力系、空间一般力系等。

当物体在某力系作用下保持平衡状态时，此力系就称为平衡力系。平衡力系应满足的条件称为平衡条件。

在已知力系上，可以加上或减去任一平衡力系，不会改变原力系对物体的作用 (加减平衡力系公理)。

1. 二力构件

作用于同一刚体上的两个力，使刚体处于平衡状态的必要和充分条件是：此二力必须等值、反向、共线 (两力平衡公理)。

二力平衡公理是刚体受最简单的力系作用时的平衡条件，如一物体仅受两力作用而平衡，则此两力的作用线必沿两力作用点的连线，如图 2-2（a）和图 2-2（b）中的杆 *AB*、图 2-2（c）和 2-2（d）中的杆 *AC* 等，这类构件常被称为二力构件。

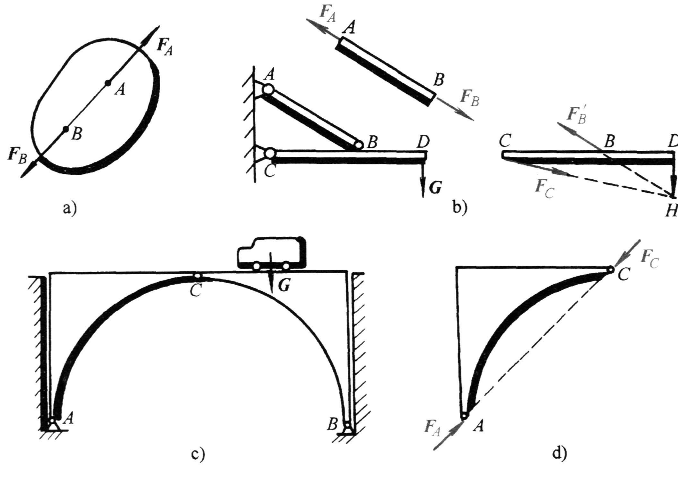


图 2–2

由以上论点，可作出如下推论：

作用于刚体上的力，可沿其作用线滑移到该刚体的任何位置而不会改变此力对刚体的作

用效应(力的可传性原理)。

此推理可证明如下：

（1）设力 F 作用于刚体上 A 点(见图 2-3（a）)。

（2）在力 F 的作用线上任选一点 B，并在 B 点加一组沿 A 作用线的平衡力 F_1 和 F_2，且使 $F_2=F_1=-F_1$(见图 2-3(b))。

（3）除去 F 与 F_1 所组成的一对平衡力，刚体上只剩下 F_2，所以 $F_2=F$(见图 2-3（c）)。

此原理说明，力是滑移矢量，它可以沿其作用线滑移，但不能任意移至受力体以外的位置。

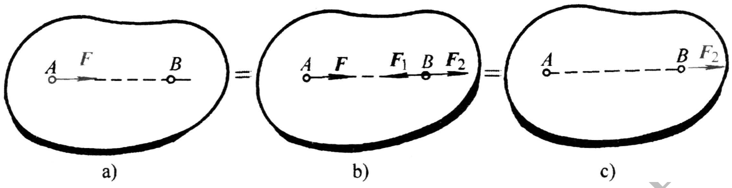


图 2–3

必须指出，力的可传性原理不适应于研究物体的内效应。

2. 二力的合成

若一力与一力系对物体的作用等效，则称此力为该力系之合力，而该力系中的每个力是这个合力的某个分力。

如一物体有两个共线或不共线的力作用，则其合力可以用矢量加法求得。如该二力不共线，则可以用力的可传性原理将其移至两作用线的汇交点，则其合力也作用于该点，其大小和方向可用此二力为邻边所构成的平行四边形的对角线来表示，如图 2-4 所示(力的平行四边形法则)。

但因为力是滑移矢量，故限制了合力作用线必须通过前两力之汇交点，其矢量式为

$$F_R=F_1+F_2$$

反之，一个力也可以分解为两个分力，分解也按力的平行四边形法则来进行。显然，由已知力为对角线可作无穷多个平行四边形(见图 2-5)，故必须附加一定条件，才可能得到确切的结果。附加条件可能为：①规定两个分力的方向；②规定其中一个分力的大小和方向。

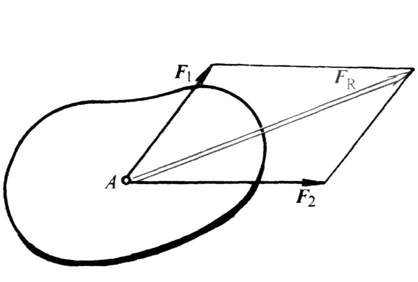


图 2–4

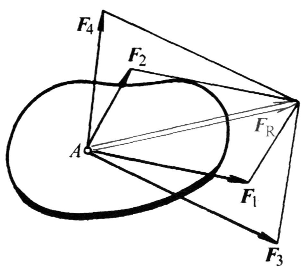


图 2–5

例如，在进行直齿圆柱齿轮的受力分析时，常将齿面的法向正压力 F_n 分解为推动齿轮旋

转的即沿齿轮分度圆圆周切线方向的分力——圆周力 F_t 与指向轴心的压力——径向力 F_r（见图 2-6)。若已知 F_n 与分度圆圆周切向所夹的压力角为 α，则

$$F_t = F_n \cos\alpha$$
$$F_r = F_n \sin\alpha$$

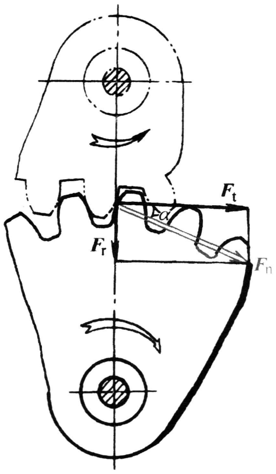


图 2–6

3. 作用力与反作用力

若将两物体间相互作用之一称为作用力，则另一个就称为反作用力。两物体间的作用与反作用力必定等值、反向、共线，分别同时作用于两个相互作用的物体上（作用与反作用定律）。

力是物体间的相互作用，作用与反作用的称呼是相对的，力总是以作用与反作用的形式存在，且以作用与反作用的方式在物体或物系内部进行传递。

这里应该注意两力平衡和作用与反作用公理之间的区别，前者叙述了作用在同一物体上两个力的平衡条件，后者却是描述两物体间相互作用的关系。

4. 三力构件

若刚体在三个共面而又互不平行的力作用下处于平衡状态，则此三力必汇交于一点（三力平衡汇交定理）。

读者可据前述内容自行证明上述定理。

刚体只受同一平面三个力作用而平衡，称为三力构件。若三个力中已知两个力的交点及第三个力的作用点，即可判断出第三个力作用线的方位。例如，如图 2-2（b）所示的起重机架，其中撑杆 AB 为二力构件，若不计横梁 CBD 的自重，则横梁只可能在 C，B，D 三点受力而成为三力构件。横梁上 B，D 两点作用力的方向为已知，D 点受重力 G 的作用，而 B 点则受杆 AB 的拉力 F'_B，G 与 F'_B 二力交于 H 点，则根据三力平衡定理，作用于 C 点的约束力 F_c 也必通过 H 点，在 CH 的连线上。如图 2-2(c) 所示的桥体 BC 也是如此。

如果考察的对象是由若干物体组成的物系，物系外的物体与物系间的作用力称为外力，而物系内部物体间的相互作用力称为内力。内力总是成对出现且呈等值、反向、共线的特点。所以就物系而言，内力的合力总是为零。因此，内力不会改变物系的运动状态。但内力与外

力的划分又与所取物系的范围有关，随着所取对象范围的不同，内力与外力是可以相互转化的。

如考察对象是单一物体，则物体在外力影响下，其内部各部分之间也有内力的传递，而这将在材料力学中作进一步的研究。

三、力系

作用于同一物体上的两个或两个以上的力所组成的系统，称为力系。如果作用在一物体上的力系可以用另一力系代替，而不改变对物体的作用效应，则这两个力系互为等效。如果一个力和一个力系等效，则称此力为该力系的合力，该力系中的各力为此合力的分力。力系可分为平面力系和空间力系两大类。若组成力系各力的作用线都处在同一平面内，则称为平面力系；若组成力系各力的作用线不都处在同一平面内，则称为空间力系。

平面力系又分为以下几种：

平面汇交力系：所有力的作用线交于一点的平面力系。

平面平行力系：所有力的作用线都相互平行的平面力系。

平面任意力系：所有力的作用线既不相交于一点，也不完全平行的平面力系。

空间力系又分为以下几种：

空间汇交力系：所有的力的作用线交于一点的空间力系。

空间平行力系：所有力的作用线都相互平行的空间力系。

空间任意力系：所有力的作用线既不相交于一点，也不相互平行的空间力系。

第二节　静力学基本公理

所谓公理就是经过实践反复检验、证明是符合客观实际的普遍规律。常见的静力学公理有五个。

一、力的平行四边形法则（公理一）

作用在物体上同一点的两个力，可以合成为一个合力。合力的作用点也在该点，合力的大小和方向，由以这两个力为邻边构成的平行四边形的对角线来确定，如图 2-7 所示，即

$$F_{\mathrm{r}} = F_1 + F_2$$

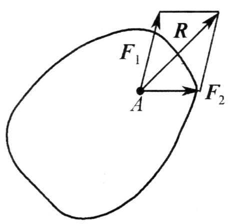


图 2–7

为了简便起见，在求二汇交力的合力时，往往不必画出二力为邻边所构成的整个平行四边形，而只画出平行四边形中的一个三角形(见图2-8)就可以了。这种通过三角形求合力的方法，称为力的三角形法则。

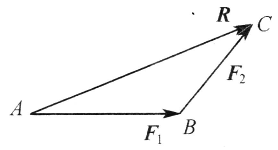


图 2–8

这个公理总结了最简单的力系简化的规律，它是较复杂力系简化的基础。

二、二力平衡公理(公理二)

作用在刚体上的两个力使刚体处于平衡的必要和充分条件是：这两个力的大小相等，方向相反，且作用在同一直线上，如图2-9所示，即

$$F_1 = -F_2$$

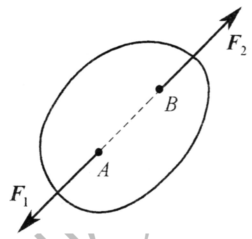


图 2–9

这个公理总结了作用于刚体上的最简单的力系平衡时所必须满足的条件。对于刚体，这个条件是既必要又充分的；但对于非刚体，这个条件是不充分的。例如：软绳受两个等值反向的拉力作用可以平衡，而受两个等值反向的压力作用就不能平衡(见图2-10)。

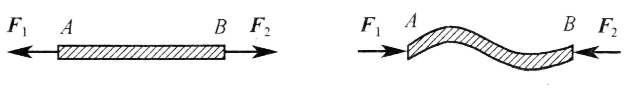


图 2–10

工程上将不计自重、只受两个力作用而处于平衡的物体称为二力杆(或二力构件)。工程中的二力杆是很常见的，如图2-11(a)所示结构中的 BC 杆，不计其自重时，就可视为二力杆或二力构件。其受力如图2-11(b)所示，其中 $FB= -FC$。如图2-11(c)中撑杆 BC，图2-11(d)三铰拱桥中的 BC 拱，若不计自重，则都是在 B，C 两点处受力，所受之力必在两力作用点的连线 BC 上。若要判断受力构件是受拉力还是受压力，则可假想将构件抽掉，如 B，C 两点靠拢，构件受压力；如 B，C 两点分离，构件受拉力。从图2-11中可知，二力杆可以是直杆，也可以是曲杆。

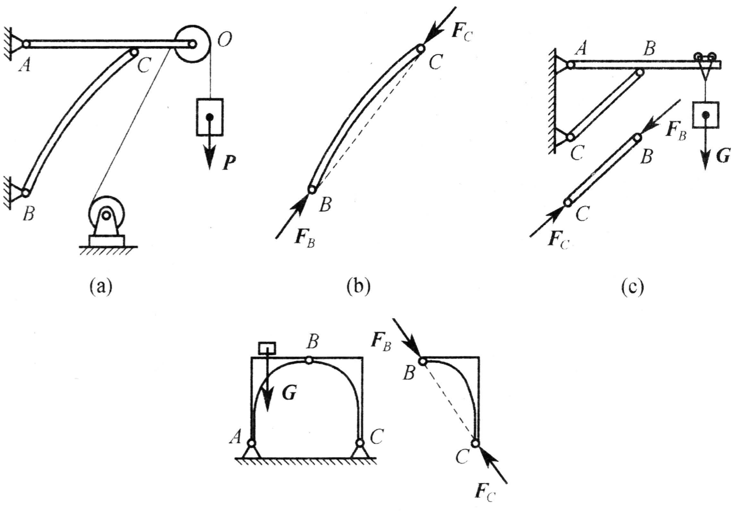


图 2–11

三、加减平衡力系公理（公理三）

在作用于刚体的任意力系上加上或减去任意一个平衡力系，都不改变原力系对刚体的作用效应。就是说，如果两个力系只相差一个或几个平衡力系，则它们对刚体的作用是相同的，因此可以等效替换。

根据加减平衡力系公理可以得到以下推论：

推论一：力的可传递性原理

所谓力的可传递性，就是作用于刚体上某点的力，可以沿着它的作用线移到刚体内任意一点，并不改变该力对刚体的作用效应。

证明：设有力 F 作用在刚体上的 A 点，如图 2-12(a) 所示。根据加减平衡力系公理，可在力的作用线上任取一点 B，并加上两个相互平衡的力 F_1 和 F_2，使 $F = F_2 = -F_1$，如图 2-12(b) 所示。由于力 F 和 F_1 也是一个平衡力系，故可除去，这样只剩下一个力 F_2，如图 2-12(c) 所示。于是，原来的力 F 与力系（F，F_1，F_2）以及力 F_2 互等。而力 F_2 就是原来的力 F，只是作用点移到了 B 点。

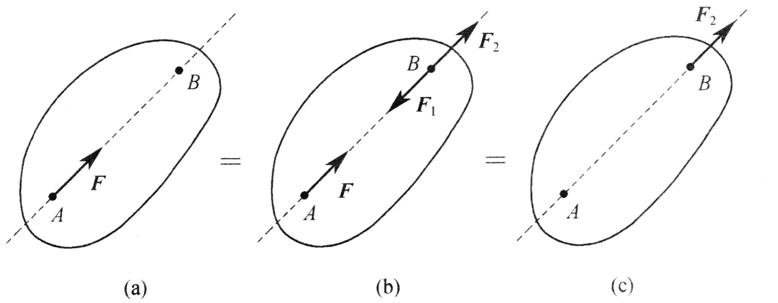


图 2–12

由此可见，对于刚体来说，力的作用点已不是决定力的作用效果的要素，它已被作用线

所代替。因此，作用于刚体上的力的三要素是：力的大小、方向和作用线。

必须注意，加减平衡力系公理不适用于变形体，只适用于刚体。

推论二：三力平衡汇交定理

刚体受共面不平行三力作用下处于平衡状态时，此三力必定汇交于同一点。

在图2-13中，刚体上作用于A，B两点上的不平行的两个力F_1，F_2，总会有一个作用线交点O。根据力的可传递性，可将此二力移至O点，再根据力的平行四边形法则，可知此二力的合力R必在此平面内，且通过O点。此时，若刚体上恰有一力F_3，其大小与R相等，方向与R相反，且与R共线，则根据二力平衡条件可知，刚体处于平衡状态，如图2-14所示。可见，当刚体受同一平面内互不平行的三个力作用而平衡时，此三力的作用线必交汇于一点。

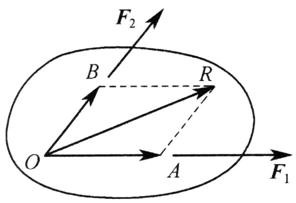


图 2–13

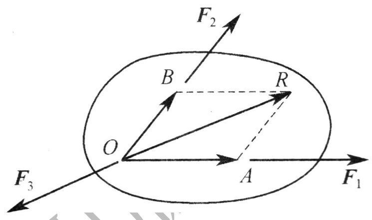


图 2–14

四、作用和反作用定律（公理四）

任何两个物体间相互作用的作用力和反作用力总是大小相等、方向相反，其作用线在同一直线上，并分别作用在两个相互作用的物体上。

这个公理概括了自然界的物体相互作用的关系，表明作用力和反作用力总是成对出现的。有作用力必有反作用力。

必须强调指出，作用力和反作用力不是作用在同一物体上，而是分别作用在两个相互作用的物体上，因此，二者不能相互平衡，要把作用和反作用定律与二力平衡公理严格区别开来。读者试分析如图2-15所示的各力之间是什么关系。

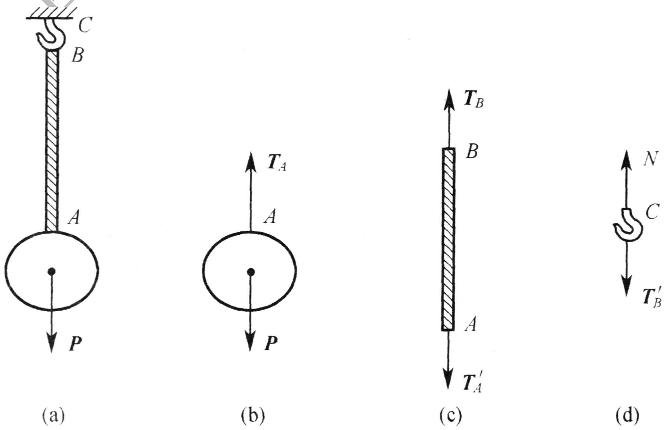


图 2–15

五、刚化原理（公理五）

变形体在某一力系作用下处于平衡，若将变形体刚化为刚体，其平衡状态不变。

这个公理提供了把变形体看做刚体模型的条件。如图 2-16 所示，绳索在等值、反向、共线的两个拉力作用下处于平衡，如将绳索刚化成刚体，其平衡状态保持不变。若绳索在两个等值、反向、共线的压力作用下并不能平衡，这时绳索就不能刚化为刚体，但刚体在上述两种力系的作用下都是平衡的，也就是说把物体刚化成刚体也是有条件的。在刚体静力学的基础上，考虑变形体的特性，可进一步研究变形体的平衡问题。

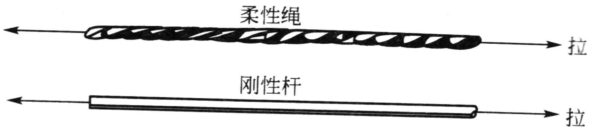


图 2–16

第三节　力的投影与力沿坐标轴的分力

一、力在任一轴上的投影

1. 力 F 与轴共面

从力的起点和终点向轴作垂线，两垂足之间的线段加上适当的正负号就称为力在轴上的投影，如图 2-17 所示。以 Fx 表示力 F 在 x 轴上的投影，则

$$F_x = \pm ab$$

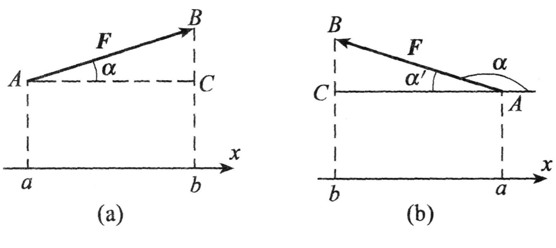


图 2–17

2. 力 F 与轴不共面

过力的起点和终点分别作平面 I，Ⅱ垂直于 x 轴，得交点 a，b，如图 2-18 所示，则

$$F_x = \pm ab$$

正负号规定：从力的起点的投影 a 到力的终点的投影 b 与投影轴 x 的正向一致者为正，反之为负。

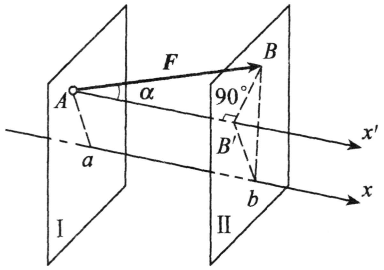


图 2–18

由图 2-17、图 2-18 知投影的计算方法为：

$$Fx = F\cos\alpha$$

其正负号由 $\cos\alpha$ 的符号决定。实际计算时，通常采用力 F 与投影轴所夹锐角计算，其正负号根据投影的规定直观判断。

二、力在平面上的投影

如图 2-19 所示，力 F 在平面上的投影为 F'，其模为

$$F' = F\cos\alpha$$

注意：力在轴上的投影是代数量，而力在平面上的投影是矢量。

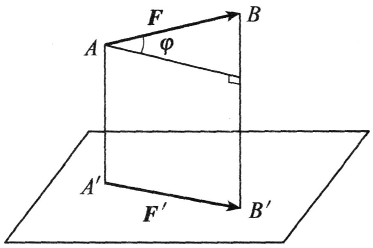


图 2–19

三、力在空间直角坐标轴上的投影

1. 直接投影法

已知力 F，取空间直角坐标系 $Oxyz$，F 力与各轴正向的夹角分别为 α，β，γ，如图 2-20 所示。则力 F 在 x，y，z 轴上的投影为

$$F_x = F\cos\alpha$$

$$F_y = F\cos\beta$$

$$F_z = F\cos\gamma$$

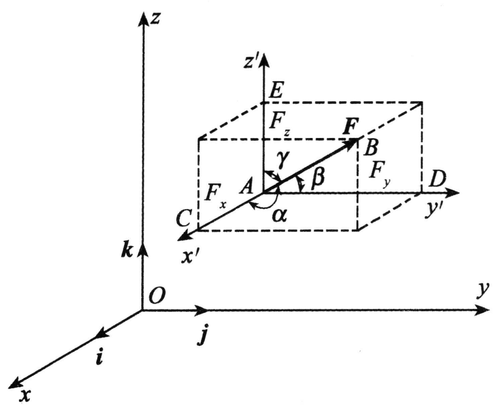


图 2–20

2. 二次投影法

有时，力 F 与 x，y 轴的夹角是未知的或是不易求的，此时可用二次投影法求力在坐标轴上的投影。已知力 F 与 z 轴的夹角 γ，及 F 在 Oxy 平面上的投影 F_{xy} 与 x 轴正向夹角 θ，如图 2-21 所示。此时，先将力 F 投影到 Oxy 平面，得力 F 在该平面上的投影 $F_{xy}=F\sin\gamma$。然后再将 F_{xy} 投影到 x，y 轴上，则 F 在 x，y，z 轴上的投影为

$$F_x = F\sin\gamma\cos\theta$$

$$F_y = F\sin\gamma\sin\theta$$

$$F_z = F\cos\gamma$$

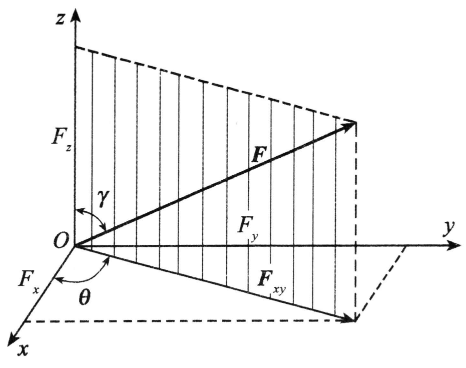


图 2–21

如果已知力 F 在直角坐标轴上的投影 F_x，F_y，F_z，则由图 2-20 可求得力 F 的大小和方向余弦分别为

$$\begin{cases} F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \\ \cos\alpha = \dfrac{F_x}{F} \\ \cos\beta = \dfrac{F_y}{F} \\ \cos\gamma = \dfrac{F_z}{F} \end{cases}$$

四、力沿直角坐标轴的分解式

在直角坐标系下，力 F 的分力与其投影之间有下列关系：分力的模等于力在相应坐标轴上的投影的绝对值，即

$$\begin{cases} |F_x| = |F_x| \\ |F_y| = |F_y| \\ |F_z| = |F_z| \end{cases}$$

如图 2-20 所示，用 i，j，k 分别表示沿 x，y，z 轴的单位矢量，则

$$\begin{cases} F_x = F_x i \\ F_y = F_y j \\ F_z = F_z k \end{cases}$$

则力沿直角坐标轴的分解式为

$$F = F_x i + F_y j + F_z k$$

必须指出，力的投影和力的分力是两个不同的概念，不得混淆：力的投影是代数量，而力的分力是矢量，上式只表示力的大小和方向，而不能表示力的作用位置。

第四节　力　矩

作用于刚体上的力可以使刚体产生移动效应和转动效应。转动效应用力对点的矩 (简称力矩) 来度量。

一、平面中的力矩

在平面问题中，因为各力和矩心所构成的平面 (简称力矩作用面) 都在同一平面内. 只要确定了力矩的大小和转向，就可完全表明力使物体绕矩心转动的效应。力矩大小的绝对值等

于力与力臂的乘积 (见图 2-22)。即

$$M_O(F) = \pm Fd = \pm 2S_{\triangle OAB} \text{面积}$$

式中，O 点称为力矩中心，简称矩心；O 点到力 F 作用线的垂直距离 d 称为力臂，规定：力使物体绕矩心逆时针方向转动为正，反之为负；力矩的单位为牛·米 (N·m) 或千牛·米 (kN·m)。

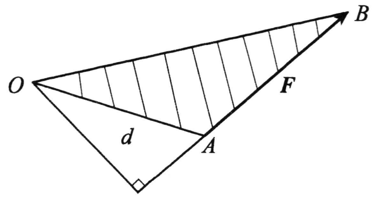


图 2–22

例 2-1　已知图 2-23 中 $P_1 = 2\text{KN}$，$P_2 = 3\text{KN}$，$P_3 = 4\text{KN}$，试求三力对 O 点的力矩。

解：根据力矩的定义，可写成

$$M_O(P_1) = 2 \times 5 \times \sin 30° = 5\text{KN} \cdot \text{m}$$

$$M_O(P_2) = 3 \times 0 = 0$$

$$M_O(P_3) = -4 \times 5 \times \sin 60° = -17.3\text{KN} \cdot \text{m}$$

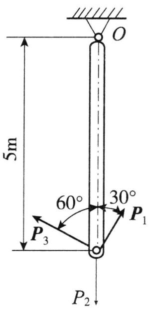


图 2–23

二、空间中的力矩

各力使物体绕矩心转动的效应，不仅取决于各力矩的大小，还取决于各力矩平面在空间的方位，以及力矩在力矩平面内的转向。在空间问题中，因为各力分别与矩心组成不同的力矩平面，因此，在空间问题中，力对点的矩必须用矢量来表示。

设在空间点 A 上作用一力 F，如图 2-24 所示。任取一点 O 为矩心，O 点到力 F 作用线的垂直距离为 d。现过矩心 O 作矢量 $Mo(F)$ 表示力对点的矩，称为力矩矢量。力矩矢量 $Mo(F)$ 的模表示力矩的大小，它等于三角形 OAB 面积的 2 倍：

$$|M_O(F)| = Fd = 2S_{\triangle OAB} \text{面积}$$

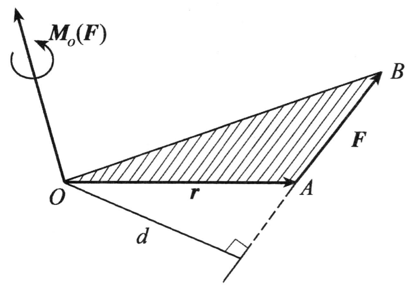


图 2–24

矢量 $Mo(F)$ 的方位与力矩平面的法线方位相同；矢量 $Mo(F)$ 的指向按右手法则确定，即以右手的四个手指表示力矩的转向，则大拇指的指向就是力矩矢量的指向。力矩矢量是定位矢量，$Mo(F)$ 应画在矩心 O 上。

力矩可以用力的作用点对矩心的矢径与力的矢积来表示。如图 2-25 中，r 是力 F 的作用点 A 对于矩心 O 的矢径，根据矢积的定义，矢量 r 与 F 的矢积 $r\times F$ 是一个矢量。这个矢量的模也等于三角形 OAB 面积的 2 倍，方位与平面 OAB 的法线方位相同，指向同样符合右手法则。比较力矩矢量 $Mo(F)$ 与矢积 $r\times F$，两者大小相等，方向相同，所以有

$$Mo(F) = r\times F$$

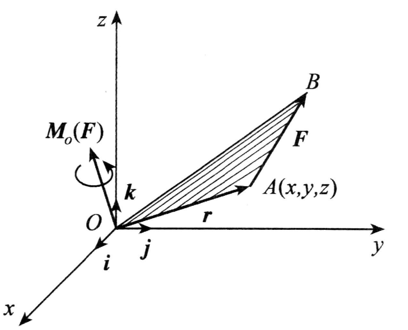


图 2–25

即一个力对于任一点的矩等于力的作用点对于矩心的矢径与该力的矢积。由于 $r = xi + yj + zk$，$F = F_x i + F_y j + F_z k$ 所以

$$M_O(F)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}=(yF_z-zF_y)i+(zF_x-xF_z)j+(xF_y-yF_x)k$$

三、合力矩定理

合力矩定理：平面汇交力系的合力对平面上任一点的矩，等于所有各分力对同一点的矩的代数和。

由于合力与原力系对物体的作用等效，故有

$$M_O(F_R) = \sum M_O(F)$$

上述合力矩定理不仅适用于平面汇交力系，对于其他力系，如平面任意力系、空间力系等，也都同样成立。

在计算力矩时，有时力臂值未在图上直接标出，计算也比较繁锁。应用这个定理，可将力沿图上标注尺寸的方向作正交分解，分别计算各分力的力矩，然后相加得出原力对该点的力矩。

例 2-2　如图 2-26 所示圆柱直齿轮的齿面受一啮合角 $\alpha = 20°$ 的法向压力 $F_n = 1\text{kN}$ 的作用，齿面分度圆直径 $d = 60\text{mm}$。试计算力对轴心的力矩。

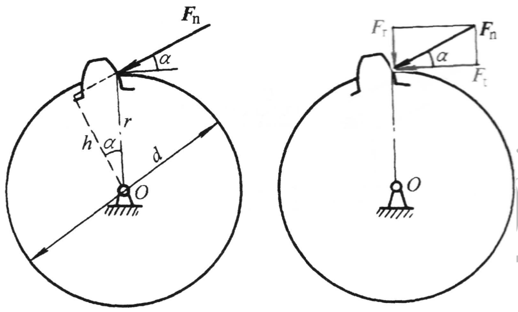


图 2–26

解 1　按力对点的力矩的定义，按图 2-26（a）有

$$M_O(F_n) = F_n h = F_n \frac{d}{2} \cos\alpha = 28.2\text{N} \cdot \text{m}$$

解 2　将 F_n 沿半径的方向分解成一组正交的圆周力 $F_t = F_n \cos\alpha$ 与径向力 $F_r = F_n \sin\alpha$（见图 2-26（b）），按合力矩定理，有

$$M_O(F_n) = M_O(F_t) + M_O(F_r) = F_t t + 0 = F_n \sin\alpha \frac{d}{2} = 28.2\text{N} \cdot \text{m}$$

例 2-3　一轮在轮轴处受一切向力的作用，如图 2-27 所示。已知 F，R，r 和 α。试求此力对轮与地面接触点 A 的力矩。

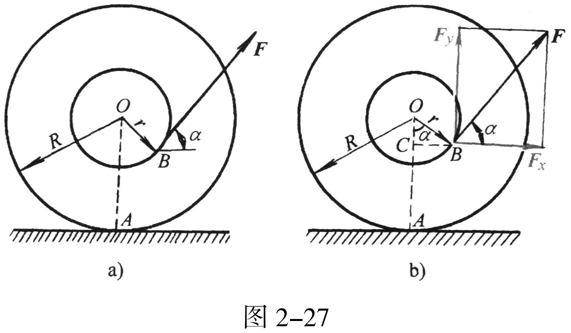


图 2–27

解　由于力 F 对矩心 A 的力臂未标明，不易求出。故将 F 在 B 点分解为正交的 F_x 和 F_y，再应用合力矩定理，有

$$M_A(F)=M_A(F_x)+M_A(F_y)$$

$$M_A(F_x)=-F_x CA=-F_x(OA-OC)=-F\cos\alpha(R-r\cos\alpha)$$

$$M_A(F_y)=F_y r\sin\alpha=(F\sin\alpha)r\sin\alpha=Fr\sin^2\alpha$$

故

$$M_A(F)=-F\cos\alpha=(R-r\cos\alpha)+Fr\sin^2\alpha=F\ (r-R\cos\alpha)$$

第五节　力　偶

一、力偶与力偶距

在日常生活中，经常看到物体同时受到大小相等、方向相反、作用线互相平行的两个力的作用。例如，拧水龙头时人手作用在开关上的两个力 F 和 F' (见图 2-28)，用钥匙开锁也是如此，等等。在力学上我们把大小相等、方向相反、作用线互相平行的两个力叫做力偶，并记为 (F, F') 力偶中两力所在的平面叫力偶作用面，两力作用线间的垂直距离叫力偶臂，以 d 表示 (见图 2-29)。

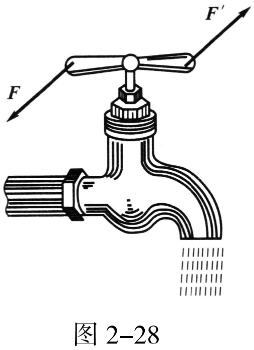


图 2−28

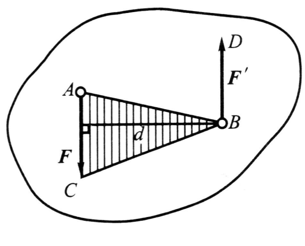
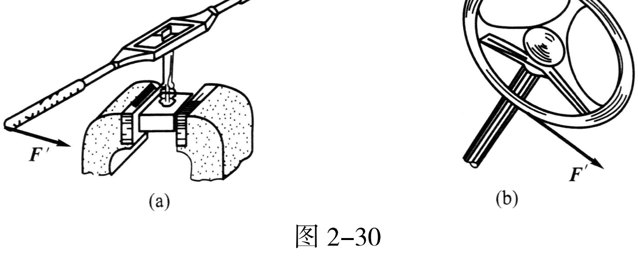


图 2−29

物体受力偶作用的实例还很多，如用丝锥攻丝时、汽车司机旋转方向盘时，他们加在丝锥上的力和方向盘上的力实际上都是力偶，如图 2-30 所示。



(a)　　(b)

图 2−30

力偶对物体的作用效应是怎样的呢？由于力偶中的两个力大小相等、方向相反、作用线平行，所以它们在任何坐标轴上投影之和等于零 (见图 2-31)。

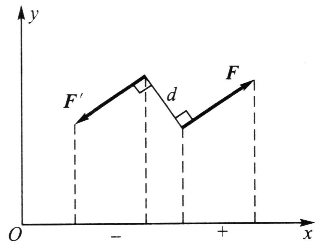


图 2–31

力偶没有合力，也不能用一个力来代替。既然没有合力，它就不会对物体产生移动效应。但力偶本身又不能平衡，因不符合二力平衡公理，所以力偶只能使物体产生转动效应。如何来度量力偶对物体的转动效应呢？显然可用力偶中两个力对矩心的力矩之和来度量，如图 2-32 所示。

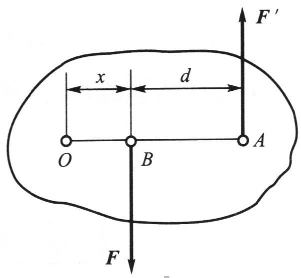


图 2–32

在力偶平面内任取一点 O 为矩心，设 O 点与力 F 作用线的距离为 x，则力偶的两个力对 O 点之矩的和为

$$M_O(F)+M_O(F')=-Fx+F'(x+d)=-Fx+F'x+F'd=F'd=Fd$$

由此可见，力偶对任一点 O 的力矩只与力 F 和力偶臂 d 的大小有关，而与矩心的位置无关。即力偶对物体的转动效应只取决于力偶中力的大小和二力之间的垂直距离。因此，在力学上以乘积 $F \cdot d$ 作为量度力偶对物体的转动效应的物理量，这个量称为力偶矩，以符号 M 表示，即

$$M = \pm F \cdot d$$

上式中的正负号表示力偶的转动方向，即逆时针方向转动时为正；顺时针方向转动时为负 (见图 2-33)。由此可见，在平面问题中，力偶矩可用代数量表示。

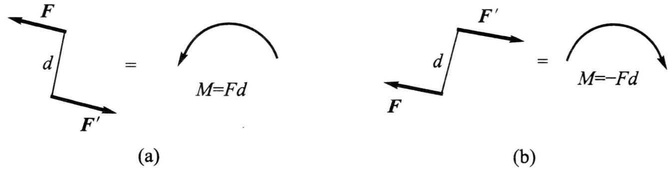


图 2–33

从图 2-29 看出：力偶矩也可用三角形面积的 2 倍来表示，即

$$M = \pm 2S_{\triangle ABC}$$

与力矩一样，力偶矩的单位是 N·m 或 kN·m。

综上所述可知，力偶对物体的作用效应，取决于下列三个因素：①力偶矩的大小；②力偶的转向；③力偶的作用面。以上称为力偶的三要素。

二、力偶的等效性

力偶和力一样，是两个最基本的力学元素。力偶没有合力，本身又不能平衡。即力偶不能与一个力等效，只能与另一个力偶等效。而力偶对物体的转动效应又完全取决于力偶矩，且与矩心的位置无关。所以，在同一平面内的两个力偶，只要它们的力偶矩大小相等、转向相同，则两力偶必等效，这就是平面力偶的等效性。

上述结论可直接由经验证实。如图 2-34(a) 所示作用在方向盘上的力偶（F_1，F_1'）或（F_2，F_2'），虽然它们的作用位置不同，但如果它们的力偶矩大小相等、转向相同，则对方向盘的转动效应就相同。

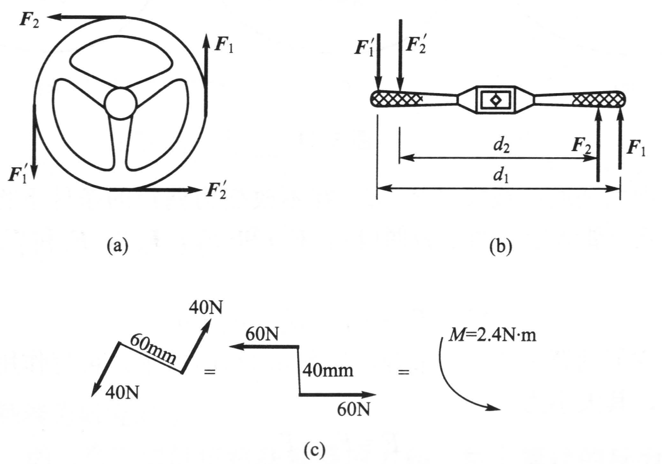


图 2–34

又如作用在丝锥扳手上的力偶（F_1，F_1'）或（F_2，F_2'）（见图 2-34(b)），虽然 $F_1 \neq F_2$，$d_1 \neq d_2$ 但如果两个力偶矩相等，即 $F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2$，则它们对丝锥的转动效应就相同。

力偶的等效性可形象地表示为图 2-34(c) 所示。

综上所述，可以得出下列两个重要推论。

(1) 力偶可以在作用面内任意转移，而不影响它对物体的作用效应。

(2) 在保持力偶矩的大小和转向不变的条件下，可任意改变力和力偶臂的大小，而不影响它对物体的作用效应。

应当指出，以上的结论，不适用于变形效应的研究。例如，如图 2-35(a) 所示的力偶（F_1，F_1'），如变换成为力偶矩相等的力偶（F_2，F_2'）（见图 2-35(b)），尽管对梁的平衡没有影响，但对梁的变形效应却不一样。

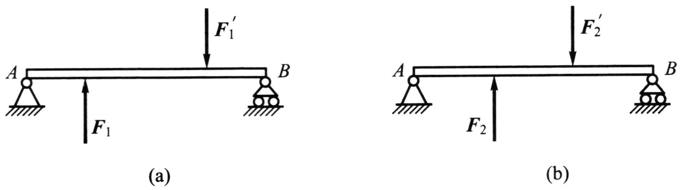


图 2–35

三、平面力偶系的合成与平衡

设在同一平面内有两个力偶（F_1，F_1'）和（F_2，F_2'），它们的力偶臂各为 d_1 和 d_2（图 2-36(a)），其力偶矩分别为 M_1 和 M_2。求其合成结果。

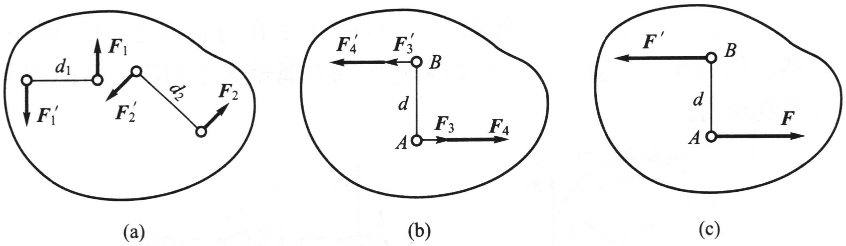


图 2–36

在力偶的作用面内任取一线段 $AB = d$，在不改变力偶矩的条件下将各力偶的臂都化为 d，于是得到与原力偶等效的两个力偶（F_3，F_3'）和（F_4，F_4'），F_3 和 F_4 的大小可由下列等式算出

$$M_1 = F_3 \cdot d \quad M_2 = F_4 \cdot d$$

然后转移各力偶使它们的臂都与 AB 重合，如图 2-36(b) 所示。再将作用于 A 点的两个力合成为一个合力 F，其大小为

$$F = F_3 + F_4$$

同样，再将 B 点的两个力也合成为一个合力 F'，其大小为

$$F' = F'_3 + F'_4$$

显然 F 与 F' 大小相等、方向相反，且不在同一直线上。它们组成了一个力偶（见图 2-336(c)），这就是两个已知力偶的合力偶（F，F'），其力偶矩为

$$M = F \cdot d = (F_3 + F_4)\,d = F_3 \cdot d + F_4 \cdot d = M_1 + M_2$$

推广：若作用在同一平面内有 n 个力偶，则其合力偶矩应为

$$M = M_1 + M_2 + M_3 + \cdots + M_n$$

或

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i$$

由上可知，平面力偶系合成的结果是一个合力偶，合力偶矩等于各已知力偶矩的代数和。

平面力偶系合成的结果是一个合力偶，如果这个平面力偶系平衡，则合力偶矩必须等于零，即

$$\sum_{i=1}^{n} M_i = 0$$

反之，如果合力偶矩为零，则平面力偶系必然平衡。

由此可知，平面力偶系平衡的必要和充分条件是：力偶系中各力偶矩的代数和等于零。上式是解平面力偶系平衡问题的基本方程，运用这个平衡方程，可以求出一个未知量。

例 2-4 要在汽缸盖上钻四个相同的孔 (见图 2-37)，现估计钻每个孔的切削力偶矩 $M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = M_0 = 15\text{N·m}$，转向如图 2-37 所示，当用多轴钻床同时钻这四个孔时，问工件受到的总切削力偶矩是多大？

解：作用在汽缸盖上的力偶有四个，各力偶矩的大小相等，转向相同，又在同一平面内，因此这四个力偶的合力偶矩为

$$M = \sum M_i = -M_1 - M_2 - M_3 - M_4 = -4M_0 = -4 \times 15 = -60$$

负号表示合力偶矩顺时针方向转动。知道总切削力偶矩之后，就可考虑夹紧措施，设计夹具。

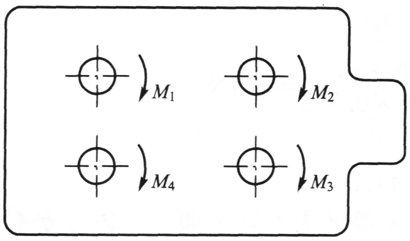


图 2–37

例 2-5 如图 2-38 所示，电动机轴通过联轴器与工作轴相连接，联轴器上四个螺栓 *A*，*B*，*C*，*D* 的孔心均匀地分布在同一圆周上，此圆的直径 $AC=BD=150\text{mm}$，电动机轴传给联轴器的力偶矩 $MO=2.5\text{kN·m}$，试求每个螺栓所受的力为多少？

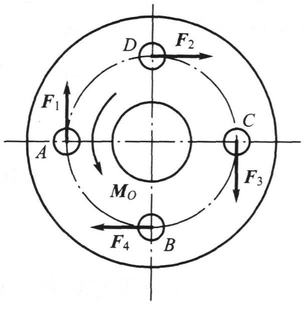


图 2–38

解　（1）取联轴器为研究对象。

作用于联轴器上的力有电动机传给联轴器的力偶、每个螺栓的反力，受力图如图 2-38 所示。假设四个螺栓的受力均匀，即 $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F$，则组成两个力偶并与电动机传给联轴器的力偶平衡。

（2）列平面力偶系平衡方程　由 $\sum M = 0$，有

$$M_O - F \times AC - F \times BD = 0$$

而

$$AC = BD$$

故

$$F = \frac{M_O}{2AC} = \frac{2.5}{2 \times 0.15} = 8.33\text{KN}$$

例 2-6　在框架杆 CD 上作用有一力偶，其力偶矩 M_O 大小为 40N·m，转向如图 2-39(a) 所示。A 为固定铰链，C，D 和 E 均为中间铰链，B 为光滑面。不计各杆质量，图中长度单位为 mm。试求平衡时，A，B，C 和 D 处的约束反力。

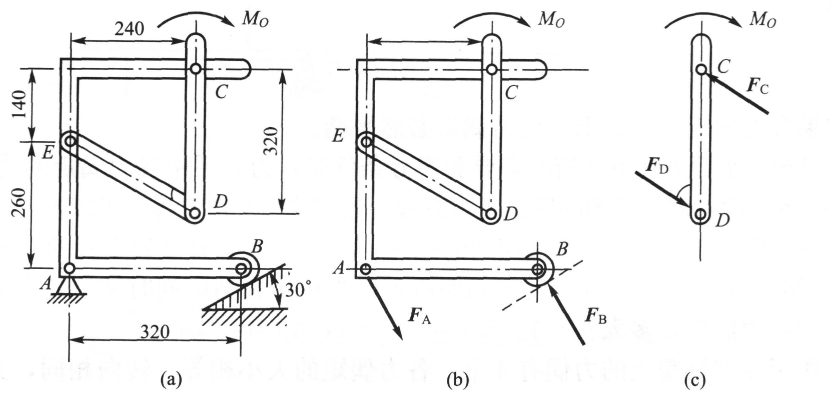


图 2–39

解　这是物体系统的平衡问题，应先选取整个系统为研究对象，求出 A 和 B 处的反力，再选杆 CD 为研究对象，求出 C 和 D 处的反力。

（1）先选取整个系统为研究对象，画受力图。

它受有力偶、光滑面 B 处约束反力 F_B 和铰链 A 的反力 F_A 的作用 (见图 2-39(b))，按照平面力偶系平衡条件，F_A 必定与 F_B 构成一力偶，故 F_A 与 F_B 平行且反向。

列出平面力偶系平衡方程式

$$\sum M = 0$$

$$-M_O + F_A \cdot AB\cos 30° = 0$$

得

$$F_A = \frac{M_O}{AB\cos 30°} = \frac{40}{0.32 \times 0.866} = 144\text{N}$$

故

$$F_B = F_A = 144\ \text{N}$$

（2）再选杆 CD 为研究对象，画受力图。它所受的力有：力偶、C 和 D 处铰链反力。DE 为二力直杆，故 F_D 沿 ED 方向。按照平面力偶系平衡条件，F_C 必与 F_D 平行且反向（见图 2-39(c)）。

列出平面力偶系平衡方程式

$$\sum M = 0$$

$$-M_O + F_C \times \frac{0.24}{\sqrt{(0.18)^2+(0.24^2)}} \times CD = 0$$

得

$$F_C = \frac{5M_O}{4 \times 0.32} = \frac{5\times 40}{4 \times 0.32} = 156\text{N}$$

注意：本例是由平衡力偶系平衡条件确定铰链反力方位。

第六节　约束和约束反力

力学问题中考察的物体，有的受有限制，有的不受限制。凡在空间的运动不受任何限制的物体称为自由体。如在空中飞行的飞机。凡运动受到某些限制的物体称为非自由体，如用绳索悬挂的重物，搁置在墙上的屋架等。阻碍物体某些方向运动的限制条件称为约束，上述绳索是重物的约束，墙是屋架的约束。

约束作用于被约束物体上的力称为约束反力，简称反力。由于约束反力阻碍物体的运动，所以约束反力的方向总是与约束所能阻碍的物体的运动方向相反，由此可确定约束反力的方向和作用线位置。约束反力是被动力，其大小是未知的，在静力学中，可用平衡条件由主动力求出。

下面介绍工程中几种常见的约束：

一、柔索约束

绳索、胶带、链条、钢索等柔性物体都属于这类约束。由柔索的性质可知，这类约束只能承受拉力，即能阻碍被约束物体沿着柔索伸长方向的运动，故柔索的约束反力通过柔索与被约束物体的连接点，方位沿着柔索，指向背离被约束物体。柔索的约束反力恒为拉力。

例如，绳索对悬挂重物的约束反力如图 2-40 所示。当胶带或链条绕过转轮时，约束反

力沿轮缘的切线方向且背离所系的转轮，如图 2-41 所示，其中拉力 F_1 与 F_1'，F_2 与 F_2' 等值、反向、共线。

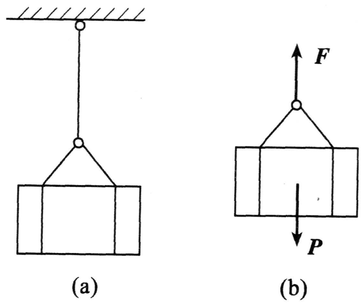


图 2–40

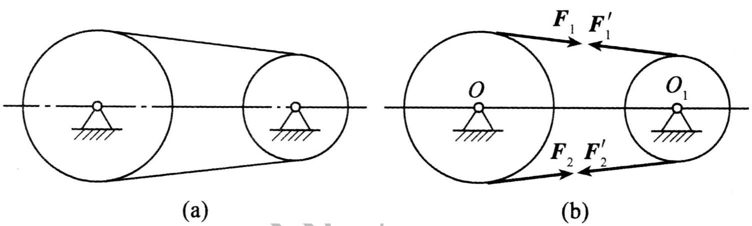


图 2–41

二、光滑接触面约束

若两个物体的接触面之间的摩擦在所研究的问题中可忽略不计，则将其视为光滑接触面。无论接触面是平面还是曲面，都不能阻碍物体沿接触面切线方向或脱离接触面方向的运动，而只能阻碍物体沿接触点处的公法线方向朝支承面内的运动。所以，光滑接触面的约束反力通过接触点，沿着接触面的公法线指向被约束物体。这类约束反力称为法向反力，通常用 F_n 表示。如图 2-42 所示为固定支承面给物体 O 的约束反力，如图 2-43 所示为固定曲面给杆的约束反力。

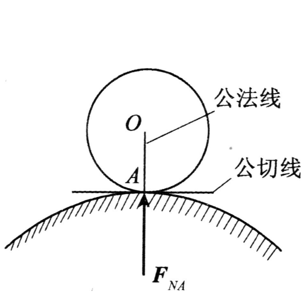


图 2–42

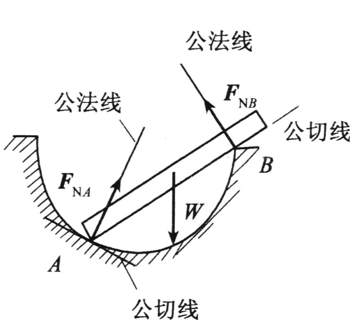


图 2–43

三、链、固定铰支座和轴承

1. 光滑圆柱铰链

在工程结构和机械中常采用光滑圆柱铰链来连接两个构件。理想的圆柱铰链 (简称铰链) 是在两个被连接的构件上相同的光滑圆孔中穿人光滑圆柱销钉，如图 2-44(b) 所示。图 2-44 为铰链连接的计算简图。若不计摩擦，销钉只能阻碍两构件在垂直于销钉轴线的平面内任意方向的相对移动，而不能阻碍两构件绕销钉轴作相对转动和沿销钉轴线方向移动。当主动力尚未确定时，约束反力的方向不能确定。因此，光滑圆柱铰链的约束反力在垂直于销钉轴线的平面内，通过圆孔中心，方向待定，如图 2-44 示。通常将该力用两个互相垂直的分力 Fc_y 和 Fc_y 表示，如图 2-44 示，分力的指向可假设，由计算结果来判断假设的正确性。

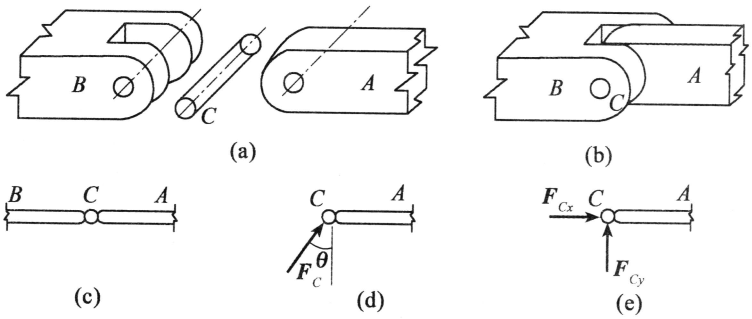


图 2–44

2. 固定铰支座

若用圆柱铰链连接两个构件，而其中一个构件固定，这就构成了工程中的固定铰支座. 简称铰链支座，如图 2-45(a) 所示，图 2-45(b)、图 2-45(c) 和图 2-45(d) 是简化图形。固定铰支座的性质与圆柱铰链相同，其约束反力也与圆柱铰链相同，如图 2-45(e) 所示。

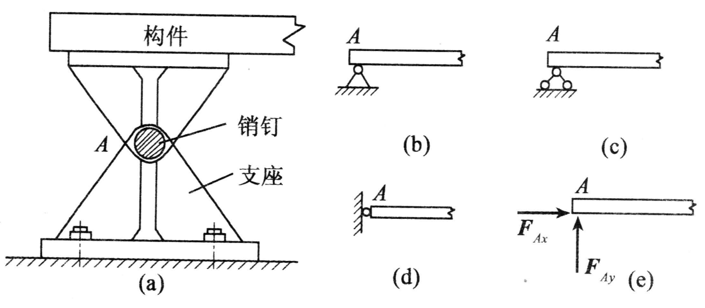


图 2–45

3. 轴承

机械中常见的转轴用轴承来支承，若不计摩擦，轴与轴承之间是光滑面接触，轴为被约

束物体。轴承约束的性质与圆柱铰链相同，因此其约束反力的特点也与圆柱铰链相同，如图 2-46 所示。

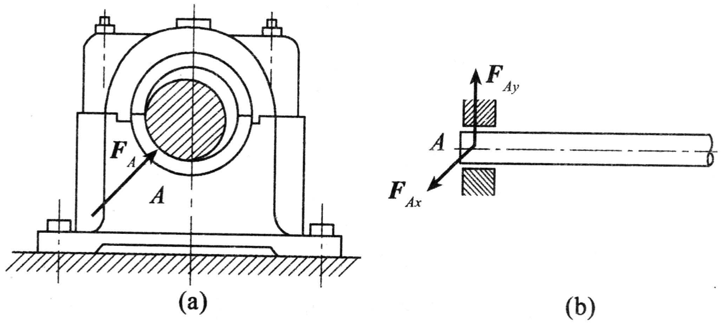


图 2–46

四、活动铰支座

活动铰支座也称为辊轴支座，它是用几个辊轴将固定铰支座支承在光滑的支承面上，如图 2-47(a) 所示。这类支座只能阻碍构件沿支承面法线方向移动，不能阻碍构件沿支承面移动和绕销钉轴线转动。因此，活动铰支座的约束反力垂直于支承面，通过销钉中心，指向可任意假定，简化图形如图 2-47(b)、2-47(c)、2-47(d) 所示，约束反力如图 2-47(e) 所示。

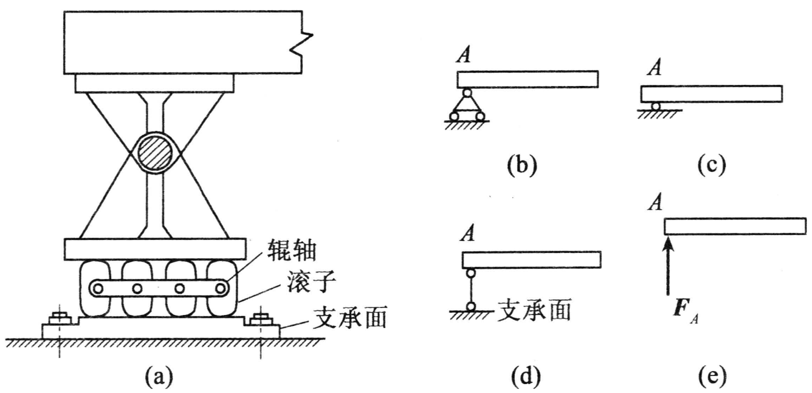


图 2–47

五、连杆约束

连杆是两端具有光滑铰链连接，本身自重不计，中间不受力的直杆。如图 2-48(a) 所示的简易起重机的撑杆 BC 在自重不计时就是连杆。连杆只阻碍物体上与连杆连接的那一点沿连杆两端铰链中心的连线方向运动，故连杆的约束反力沿连杆两端铰链中心的连线，指向待定。图 2-48(b) 中 F'_{CB} 是连杆作用于 AD 的约束反力。如图 2-48(c) 所示是连杆 BC 的受力情况。根据二力平衡公理，当连杆平衡时，作用于杆两端的力必满足等值、反向、共线的条件。

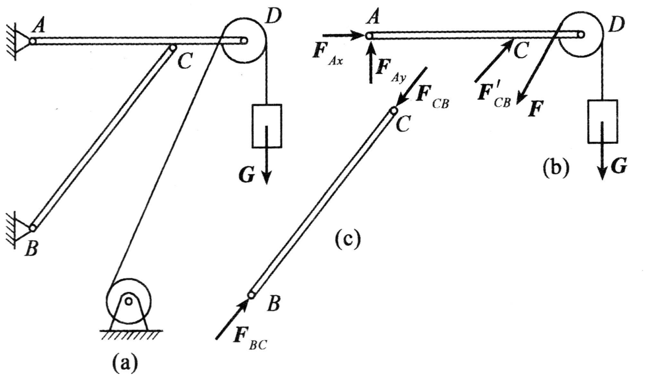


图 2–48

只在两个力作用下平衡的杆 (或构件) 称为二力杆 (或二力构件)。连杆就是二力杆。连杆在结构中用做拉杆或支撑杆。

六、固定端约束

在工程实际中，构成固定端约束的形式各有不同，但它们的共同特点是：既阻碍物体在平面内沿任何方向移动，又阻碍物体绕固定端转动。如图 2-49(a) 所示为嵌入墙内支承阳台的悬臂梁，图 2-49(b) 所示为固定车刀的车刀架。墙对悬臂梁的约束和车刀架对车刀的约束均可视为固定端约束。图 2-49(c) 所示为固定端约束的简化图。一般情况下，平面问题中的固定端约束有三个约束反力：水平反力、铅直反力和反力偶，如图 2-49(d) 所示。其中力的指向和反力偶的转向可任意假设，由计算结果来判定假设的正确性。

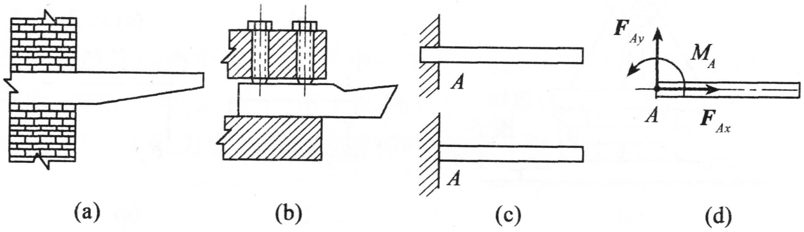


图 2–49

以上介绍的是平面问题中几种常见的、典型的约束，有关空间约束的类型及其约束反力。在工程实际中，对某些结构或构件，如铁路桥梁、大型渡槽、弧形闸门等，往往需要设置比较正规的典型约束 (见图 2-50(a) 和图 2-50(a))，以使设计能更好地符合约束反力的实际情况。但许多工程上的约束构造并不一定与上述理想的形式相同，这就要求我们根据问题的性质、约束的构造特点等，抓住主要因素，忽略次要因素，将实际约束近似地看作上述某种典型约束。如图 2-50 (a) 所示为一预制的钢筋混凝土柱与基础连接的情况，若柱的下端插入基础预留的杯口后用沥青麻丝填实，则在荷载作用下，柱端的水平和竖向移动都被限制，但仍可做微小转动。此时，这种约束可近似简化为固定铰支座，如图 2-50(b) 所示。若在基础杯口底和柱端的四周均用混凝土浇灌，这种约束可近似简化为固定端约束，如图 2-50(c) 所示。

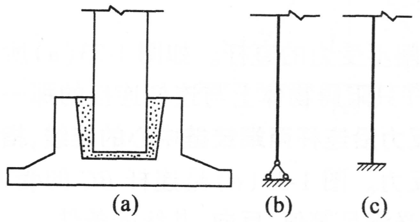


图 2–50

第七节　物体的受力分析和受力图

一、计算简图

工程实际中，具体的结构是复杂的，包含的因素很多，要全部考虑是不可能的。在进行力学分析时，要根据问题的具体情况，去掉非主要、非本质的因素，抓住主要的本质的因素，将问题抽象为力学模型，原则是既要符合实际情况，又要使计算简化。力学模型的图形称为计算简图。

将一个实际问题抽象为理想化的力学模型并不是一件容易的事，一方面需要对工程有较多的实践经验，另一方面要善于分析主要和次要因素，以决定其取舍。一般需要从结构本身、支座和荷载等方面进行简化，使所选取的计算简图尽可能地反映出结构的实际受力情况，并使计算简化、可行。例如，如图 2-51(a) 所示板梁式公路桥梁，梁的左端用凹形垫板支承，右端用凸形垫板支承。在对桥梁进行力学分析时，考虑到梁是等截面的直梁，因荷载均作用在梁的纵向对称平面内，因此分析梁的支座反力时，可以把实际公路桥梁用梁的轴线来代表。作用在桥梁上的荷载有恒载和活载：恒载是桥梁的自重，它们沿梁长均匀分布，简化为均布线荷载；活载是汽车荷载，简化为两个集中荷载。图中的凹形垫板支座，允许梁左端截面做微小转动，但不允许梁沿轴线方向移动，故可简化为固定铰支座；而凸形垫板既允许梁的右端横截面发生微小转动，也允许梁沿纵向轴线方向发生微小移动，因而可以简化为活动铰支座，如图 2-51(b) 所示即此桥梁的计算简图。工程上将这种简单支承的梁称为简支梁。

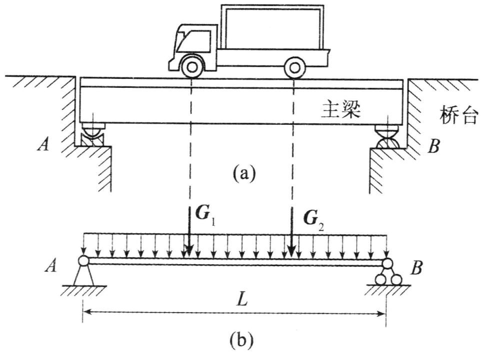


图 2–51

二、受力图

对结构进行力学分析时，为了清晰地表示结构的受力情况，将所要研究的对象从与它相联系的周围的物体中分离出来，即取分离体 (或脱离体)，在分离体上画出研究对象所受的全部主动力和约束反力，这样的图形称为受力图。选取研究对象，正确进行受力分析和画受力图，是解决力学问题的重要前提和关键。

下面举例说明如何正确地画单个物体和物体系统的受力图。

例 2-7　多跨梁用铰链 B 连接，荷载和支座如图 2-52 (a) 所示。试分别画梁 AB，BC 和整体受力图。

解 (1) 画梁 AB 的受力图。作用在梁 AB 上的主动力有：DB 段上的均布荷载 q；E 处的集中力偶，其力偶矩为 M_0 约束反力有：固定端支座的约束反力 F_{AX}，F_{Ay} 和 M_A；铰链 B 的约束反力 F_{BX} 和 F_{By}。受力图如图 2-52(b) 所示，图上所有的约束反力指向都是假设的。

(2) 画梁 BC 的受力图。作用在 BC 梁上的主动力有：明段上的均布荷载 q；F 处的集中力 F。约束反力有：铰链 B 的约束反力 F'_{BX}，F'_{By}，其方向分别与图 2-52(b) 中 F'_{BX}，F'_{By} 的方向相反；活动铰支座 C 的约束反力 F_C，方位垂直于支承面，指向假设。受力图如图 2-52(c) 所示。

(3) 画整体的受力图。作用在整体上的主动力有均布荷载 q、集中力 F 和集中力偶 M，约束反力有 F_{AX}，F_{Ay}，M_A 和 F_C，受力图如图 2-52(d) 所示。

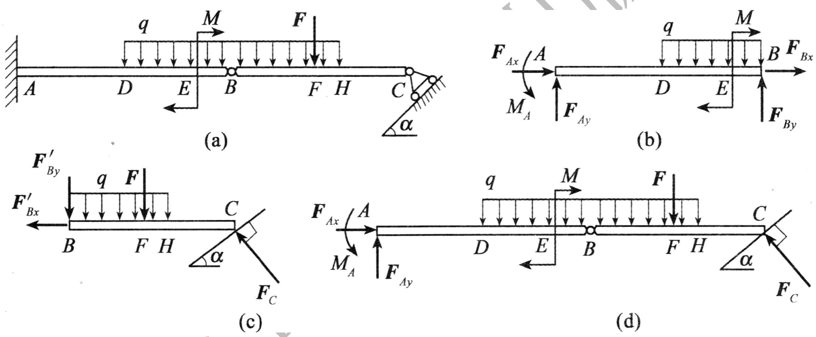


图 2–52

例 2-8 画图 2-53(a) 所示结构各构件及整体受力图。设接触处光滑，结构自重不计。

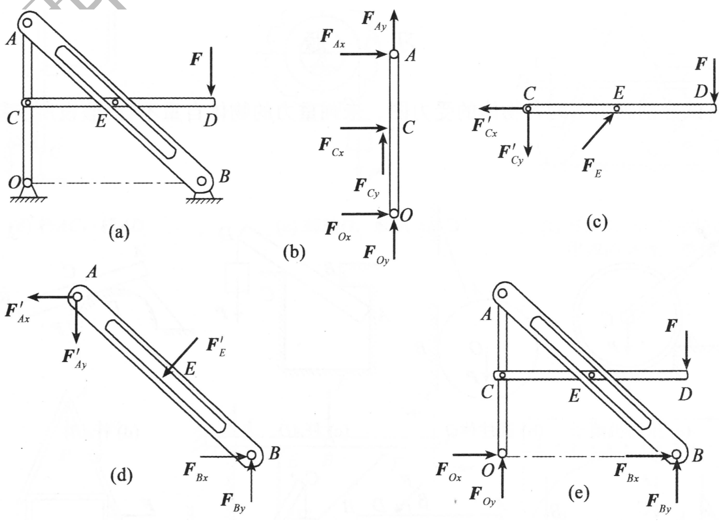


图 2–53

解　(1) 画 AO 的受力图。A，C 处为铰链，O 处是固定铰支座，它们的约束反力均为两个正交的分力，指向假设。受力图如图 2-53(b) 所示。

(2) 画 CD 的受力图。C 处为 AO 给 CD 的反作用力；E 处为销钉，由于不计摩擦，所以销钉与滑槽之间属于光滑接触面约束，约束反力垂直于滑槽，指向假设；D 处为主动力。受力圈如图 2-53(c) 所示。

(3) 画 AB 的受力图。A 处为 AO 给 AB 的反作用力，E 处为销钉给滑槽的反作用力，B 处为固定铰支座。受力图如图 2-53(d) 所示。

(4) 画整体受力图。整体在 D 点作用有主动力，在 D，B 两处为固定铰支座，其约束反力均为两个正交的分力。受力图如图 2-53(e) 所示。

通过以上各例的分析，可将画受力图的步骤和要点归纳如下：

(1) 选取研究对象。根据解题要求，可取结构中某个或某几个部件为研究对象，也可取整体为研究对象。

(2) 画研究对象的分离体图。

(3) 在分离体上，画上它所受的全部主动力。

(4) 在分离体上去掉约束的地方按约束性质画出相应的约束反力 n。

在分析物体的受力情况时应注意：

(1) 在整体受力图上只画外力 (包括主动力和约束反力)，不画内力 n(即物体系统内各物体之间的相互作用力)。

(2) 当分别画系统中两个相互有联系的物体的受力图时，两个受力图上在连接处相互作用的力的方向应按作用与反作用定律来确定。

(3) 同一处的约束反力在各个受力图上画法要一致。