

目 录

第一章 函数与极限	1
第一节 函数	1
第二节 数列的极限	2
第三节 函数的极限	3
第四节 函数极限的运算规则	5
第五节 函数极限的存在准则	6
第六节 无穷大量和无穷小量	7
第七节 函数的连续性	8
第八节 相关应用	11
第二章 导数与微分	14
第一节 导数的概念	14
第二节 导数公式与函数的和差积商的导数	21
第三节 反函数和复合函数的导数	25
第四节 隐函数和参数式函数的导数、相关变化率	29
第五节 高阶导数	33
第六节 微分	37
第七节 相关应用	43
第三章 微分中值定理和导数的应用	45
第一节 拉格朗日中值定理和函数的单调性	45
第二节 函数的极值与最值	52
第三节 曲线的凹凸性与拐点	55
第四节 函数图形的描绘	58
第五节 相关应用	61
第四章 积分及其计算	65
第一节 定积分的概念与性质	65
第二节 微积分基本公式	70
第三节 换元积分法与分部积分法	76
第四节 广义积分	88
第五节 定积分的近似计算	91
第六节 几种特殊类型函数的积分举例	95

第七节 相关应用	96
第五章 定积分的应用	101
第一节 定积分的微元法	101
第二节 定积分微元法的使用条件	102
第三节 平面图形的面积	106
第四节 空间几何体体积	113
第五节 平面曲线的弧长	119
第六节 相关应用	122
第六章 微分方程及其应用	130
第一节 基本概念	130
第二节 一阶微分方程	131
第三节 可降阶的高阶微分方程	140
第四节 高阶线性微分方程的解法及应用	142
第五节 相关应用	148
第七章 曲线积分与曲面积分	156
第一节 对弧长的曲线积分	156
第二节 对坐标的曲线积分	159
第三节 格林公式及其应用	164
第四节 对面积的曲面积分	171
第五节 对坐标的曲面积分	174
第六节 高斯公式、通量与散度	180
第七节 斯托克斯公式、环流量与旋度	184
第八节 相关应用	186
第八章 无穷级数	189
第一节 常数项级数的概念与性质	189
第二节 常数项级数审敛法	191
第三节 幂级数	195
第四节 函数展成幂级数	199
第五节 傅里叶级数	202
第六节 正弦级数和余弦级数	205
第七节 周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数	206
第八节 相关应用	208
参考文献	210

第一章 函数与极限

第一节 函 数

一、函数的定义

当变量 x 在其变化范围内任意取定一个数值时，变量 y 按照一定的法则 f 总有确定的数值与它对应，则称 y 是 x 的函数。变量 x 的变化范围叫作这个函数的定义域。通常 x 叫作自变量， y 叫作函数值(或因变量)，变量 y 的变化范围叫作这个函数的值域。注：为了表明 y 是 x 的函数，用记号 $y=f(x)$ ， $y=F(x)$ 等来表示。这里的字母“ f ”和“ F ”表示 y 与 x 之间的对应法则，即函数关系，它们是可以任意采用不同的字母来表示的。如果自变量在定义域内任取一个确定的值时，函数只有一个确定的值和它对应，这种函数叫作单值函数，否则叫作多值函数。这里只讨论单值函数。

二、函数相等

由函数的定义可知，一个函数的构成要素为定义域、对应关系和值域。由于值域是由定义域和对应关系决定的，所以，如果两个函数的定义域和对应关系完全一致，就称两个函数相等。

三、函数的表示方法

(1)解析法：用数学式子表示自变量和因变量之间的对应关系的方法。例如，在直角坐标系中，半径为 r 、圆心在原点的圆的方程是 $x^2 + y^2 = r^2$ 。

(2)表格法：将一系列的自变量值与对应的函数值列成表来表示函数关系的方法。例如，在实际应用中，经常会用到的二次方表、三角函数表等都是用表格法表示的函数。

(3)图示法：用坐标平面上曲线来表示函数的方法。一般用横坐标表示自变量，纵坐标表示因变量。例如，在直角坐标系中，半径为 r 、圆心在原点的圆用图示法，如图 1-1 所示。

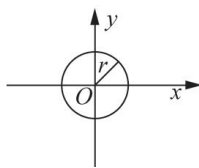


图 1-1

第二节 数列的极限

一、数列

若按照一定的法则，有第一个数 a_1 ，第二个数 a_2 ，第三个数 a_3 ， $\cdots$ ，依次排列下去，使得任何一个正整数 n 对应着一个确定的数 a_n ，则称这列有次序的数 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 为数列。数列中的每一个数叫作数列的项。第 n 项 a_n 叫作数列的一般项或通项。

也可以把数列 a_n 看作自变量为正整数 n 的函数，即 $a_n = f(n)$ ，它的定义域是全体正整数。

二、极限

极限的概念是为求实际问题的精确解答而产生的。

例如，可通过作圆的内接正多边形，近似求出圆的面积。

设有一圆，首先作圆内接正六边形，把它的面积记为 A_1 ；再作圆的内接正十二边形，其面积记为 A_2 ；再作圆的内接正二十四边形，其面积记为 A_3 ；依次循环下去（一般把内接正 $6 \times 2^{n-1}$ 边形的面积记为 A_n ）可得一系列内接正多边形的面积 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots$ ，它们就构成一列有序数列。可以发现，当内接正多边形的边数无限增加时， A_n 也无限接近某一确定的数值（圆的面积），这个确定的数值在数学上被称为数列 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots$ 当 $n \rightarrow \infty$ （读作 n 趋近于无穷大）时的极限。

上面这个例子就是我国古代数学家刘徽（公元 3 世纪）的割圆术。

三、数列的极限

一般地，对于数列 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 来说，若存在任意给定的正数 ϵ （不论其多么小），总存在正整数 N ，使得对于 $n > N$ 时的一切 x_n ，不等式 $|x_n - a| < \epsilon$ 都成立，则称常数 a 是数列 x_n 的极限，或者称数列 x_n 收敛于 a ，记作： $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 或 $x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$ 。

注：此定义中的正数 ϵ 只有任意给定，不等式 $|x_n - a| < \epsilon$ 才能表达出 x_n 与 a 无限接近的意思，且定义中的正整数 N 与任意给定的正数 ϵ 是有关的，它是随着 ϵ 的给定而选定的。

在此可能不易理解这个概念，下面再给出它的一个几何解释，以便理解它。数列 x_n 极限为 a 的一个几何解释：将常数 a 及数列 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 在数轴上用它们的对应点表示出来，再在数轴上做点 a 的 ϵ 邻域，即开区间 $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ ，如图 1-2 所示。

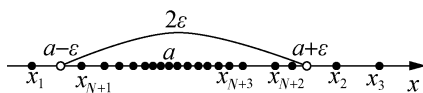


图 1-2

因不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 与不等式 $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ 等价, 故当 $n > N$ 时, 所有的点 x_n 都落在开区间 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 内, 而只有有限个(至多只有 N 个)点在此区间以外.

注: 至于如何求数列的极限在以后会学习到, 这里不作讨论.

四、数列的有界性

对于数列 x_n , 若存在着正数 M , 使得一切 x_n 都满足不等式 $|x_n| \leq M$, 则称数列 x_n 是有界的, 若正数 M 不存在, 则可说数列 x_n 是无界的.

定理 1.1 若数列 x_n 收敛, 则数列 x_n 一定有界.

注: 有界的数列不一定收敛, 即数列有界是数列收敛的必要条件, 但不是充分条件. 例如: 数列 $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)_{n+1}, \dots$ 是有界的, 但它是发散的.

应用举例 1.1 设 $a > 0$ 为常数, 数列 x_n 由下式定义:

$$x_n = \frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}} \right) \quad (n=1, 2, \dots)$$

其中, x_n 为大于零的常数, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

第三节 函数的极限

数列可看作一类特殊的函数, 即自变量取 $x \rightarrow \infty$ 内的正整数, 若自变量不再受限于正整数的顺序, 而是连续变化的, 就成了函数.

函数的极值有两种情况:

- (1) 自变量无限增大;
- (2) 自变量无限接近某一定点 x_0 .

如果在这时, 函数值无限接近于某一常数 A , 就叫作函数存在极值. 前面已知道函数的极值的情况, 那么函数的极限如何呢?

结合数列的极限来介绍一下函数极限的概念和函数的极限(分两种情况).

一、自变量趋向无穷大时函数的极限

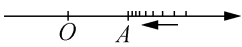
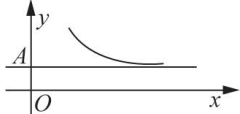
定义 1.1 设函数 $y=f(x)$, 若对于任意给定的正数 ε (不论其多么小), 总存在着正数 X , 使得对于适合不等式 $|x| > X$ 的一切 x , 所对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x) - A| < \epsilon$$

则常数 A 就叫作函数 $y = f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限, 记作: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

函数的极限与数列的极限对比见表 1-1.

表 1-1

数列的极限的定义	函数的极限的定义
若存在数列 $a_n = f(x)$ 与常数 A , 任给一正数 $\epsilon > 0$, 总可找到一正整数 N , 对于 $n > N$ 的所有 a_n 都满足 $ a_n - A < \epsilon$, 则称数列 a_n 当 $x \rightarrow \infty$ 时收敛于 A , 记作: $\lim_{x \rightarrow \infty} a_n = A$	若存在函数 $y = f(x)$ 与常数 A , 任给一正数 $\epsilon > 0$, 总可找到一正数 X , 对于适合 $ x > X$ 的一切 x , 都满足 $ f(x) - A < \epsilon$, 则称函数 $y = f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限为 A , 记作: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$
	

二、自变量趋向有限值时函数的极限

先来看一个例子.

函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, 当 $x \rightarrow 1$ 时函数值的变化趋势如何? 函数在 $x = 1$ 处无定义. 对实数来讲, 在数轴上任何一个有限的范围内, 都有无穷多个点, 为此把 $x \rightarrow 1$ 时函数值的变化趋势用表列出, 如图 1-3 所示.

x	$\cdots 0.9$	0.99	0.999	$\cdots$	$ 1 $	$\cdots$	1.001	1.01	1.1	$\cdots$
$f(x)$	$\cdots 1.9$	1.99	1.999	$\cdots$	$ 2 $	$\cdots$	2.001	2.01	2.1	$\cdots$

图 1-3

从图 1-3 中可以看出: 当 $x \rightarrow 1$ 时, $f(x) \rightarrow 2$, 而且只要 x 与 1 有多接近, $f(x)$ 就与 2 有多接近. 或说: 只要 $f(x)$ 与 2 只差一个微量 ϵ , 就一定可以找到一个 δ , 当 $|x - 1| < \delta$ 时满足 $|f(x) - 2| < \epsilon$.

定义 1.2 设函数 $f(x)$ 在某点 x_0 的某个去心邻域内有定义, 且存在数 A , 若对任意给定的 ϵ (不论其多么小), 总存在正数 δ , 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x) - A| < \epsilon$, 则称函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时存在极限, 且极限为 A , 记作: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

在定义中为什么是在去心邻域内呢? 这是因为只讨论 $x \rightarrow x_0$ 的过程, 与 $x = x_0$ 处的情况无关. 此定义的核心问题: 对给出的 ϵ 是否存在正数 δ , 使其在去心邻域内的 x 均满足不等式.

有些时候, 要用此极限的定义来证明函数的极限为 A , 其证明方法是怎样的呢?

(1) 先任取 $\epsilon > 0$;

(2) 写出不等式 $|f(x) - A| < \epsilon$;

(3)解不等式能否得出去心邻域 $0 < |x - x_0| < \delta$, 若能, 则对于任给的 $\epsilon > 0$, 总能找出 δ , 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x) - A| < \epsilon$ 成立, 因此 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

应用举例 1.2 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right]$.

解 当 $x \neq 0$ 时, $\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x}$.

当 $x > 0$ 时, $1 - x < x \left[\frac{1}{x} \right] \leq 1$, 可得 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1$.

当 $x < 0$ 时, $1 - x > x \left[\frac{1}{x} \right] \geq 1$, 可得 $\lim_{x \rightarrow 0^-} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1$.

从而 $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1$.

第四节 函数极限的运算规则

前面已经学习了数列极限的运算规则, 数列可作为一类特殊的函数, 故函数极限的运算规则与数列极限的运算规则相似.

若已知 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时, $f(x) \rightarrow A$, $g(x) \rightarrow B$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = AB$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$$

推论 $\lim_{x \rightarrow x_0} kf(x) = kA$ (k 为常数), $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^m = A^m$ (m 为正整数).

在求函数的极限时, 利用上述规则就可把一个复杂的函数化为若干个简单的函数来求极限.

应用举例 1.3 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + x - 1}{4x^3 + x^2 - x + 3}$.

解
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + x - 1}{4x^3 + x^2 - x + 3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} 3x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} x - \lim_{x \rightarrow 1} 1}{\lim_{x \rightarrow 1} 4x^3 + \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 3} = \frac{3 + 1 - 1}{4 + 1 - 1 + 3} = \frac{3}{7}$$

应用举例 1.4 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 4x^2 + 2}{7x^3 + 5x^2 - 3}$.

此例若像上例那样求解, 则会发现此函数的极限不存在. 通过观察可以发现此分式的分子和分母都没有极限, 像这种情况怎么办呢? 下面把它解出来.

解
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 4x^2 + 2}{7x^3 + 5x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^3}}{7 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^3}} = \frac{3}{7}$$

通过此例题可以发现：当分式的分子和分母都没有极限时就不能运用商的极限的运算规则了，应先把分式的分子、分母转化为存在极限的情形，然后运用规则求之。

第五节 函数极限的存在准则

先来看一个例子：符号函数为

$$\operatorname{sgn} = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

对于这个分段函数， x 从左趋于 0 和从右趋于 0 时函数极限是不相同的。为此定义了左、右极限的概念。

定义 1.3 若当 x 仅从左侧 ($x < x_0$) 趋近 x_0 时，函数 $f(x)$ 与常量 A 无限接近，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0^-$ 时的左极限，记作： $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ 。

若当 x 仅从右侧 ($x > x_0$) 趋近 x_0 时，函数 $f(x)$ 与常量 A 无限接近，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0^+$ 时的右极限，记作： $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ 。

只有当 $x \rightarrow x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的左、右极限存在且相等，才称 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时有极限。

准则一：如果对于点 x_0 的某一邻域内的一切 x (点 x_0 本身可以除外，或绝对值大于某一正数的一切 x) 有 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ，且 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$ ， $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$ ，那么 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在，且等于 A 。

此准则也就是夹逼准则。

准则二：单调有界的函数必有极限；有极限的函数不一定单调有界。

应用举例 1.5 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 0)$ 。

解 (1) 当 $a = 1$ 时， $\sqrt[n]{1} = 1$ ，故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$ 。

(2) 当 $a > 1$ 时，设 $x_n = \sqrt[n]{a}$ ，显然 $x_n > 1$ 。当 $n > a$ 时， $x_n = \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}$ ，可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ，故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 1)$ 。

(3) 当 $0 < a < 1$ 时，总存在一个正数 $b (b > 1)$ ，使得 $a = 1/b$ ，由 (2) 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b} = 1$ ，故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{1} = 1 \quad (a > 0)$$

第六节 无穷大量和无穷小量

一、无穷大量

先来看一个例子：已知函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ ，当 $x \rightarrow 0$ 时，可知 $|f(x)| \rightarrow \infty$ ，把这种情况称为 $f(x)$ 趋向无穷大。

为此可定义如下：设有函数 $y = f(x)$ ，在 $x = x_0$ 的去心邻域内有定义，对于任意给定的正数 N （一个任意大的数），总可找到正数 δ ，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时， $|f(x)| > N$ 成立，则称函数当 $x \rightarrow x_0$ 时为无穷大量，记作： $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ （表示为无穷大量，实际它是没有极限的）。

同样可以给出当 $x \rightarrow \infty$ 时， $f(x)$ 无限趋大的定义：设有函数 $y = f(x)$ ，当 x 充分大时有定义，对于任意给定的正数 N （一个任意大的数），总可以找到正数 M ，当 $|x| > M$ 时， $|f(x)| > N$ 成立，则称函数当 $x \rightarrow \infty$ 时是无穷大量，记作： $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 。

二、无穷小量

以零为极限的变量称为无穷小量。

定义 1.4 设有函数 $f(x)$ ，对于任意给定的正数 ϵ （不论它多么小），总存在正数 δ （或正数 M ），使得对于适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ （或 $|x| > M$ ）的一切 x ，所对应的函数值满足不等式 $|f(x)| < \epsilon$ ，则称函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ （或 $x \rightarrow \infty$ ）时为无穷小量，记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \quad (\text{或} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0)$$

注：无穷大量与无穷小量都是一个变化不定的量，不是常量，只有 0 可作为无穷小量的唯一常量。无穷大量与无穷小量的区别是：前者无界，后者有界；前者发散，后者收敛于 0。无穷大量与无穷小量是互为倒数关系的。

三、关于无穷小量的两个定理

定理 1.2 如果函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ （或 $x \rightarrow \infty$ ）时有极限 A ，则差 $f(x) - A = \partial(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ （或 $x \rightarrow \infty$ ）时的无穷小量；反之亦成立。

定理 1.3 无穷小量的运算定理。

- (1) 有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量；
- (2) 有限个无穷小量的积仍是无穷小量；

(3) 常数与无穷小量的积也是无穷小量.

应用举例 1.6 设有数列 $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3+x_1}$, $\dots$, $x_n = \sqrt{3+x_{n-1}}$, $\dots$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

证 显然 $x_{n+1} > x_n$, 故 $\{x_n\}$ 是单调递增的. 下面利用数学归纳法证明 $\{x_n\}$ 有界.

因为 $x_1 = \sqrt{3} < 3$, 假定 $x_k < 3$, 则

$$x_{k+1} = \sqrt{3+x_k} < \sqrt{3+3} < 3$$

所以 $\{x_n\}$ 是有界的, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ 存在.

由递推关系 $x_{n+1} = \sqrt{3+x_n}$, 得 $x_{n+1}^2 = 3+x_n$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (3+x_n)$, 即

$$A^2 = 3 + A$$

解得 $A = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$, $A = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ (舍去), 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

第七节 函数的连续性

在自然界中有许多现象, 如气温的变化、植物的生长等都是连续地变化着的. 这种现象在函数关系上的反映, 就是函数的连续性.

在定义函数的连续性之前先来学习一个概念——增量.

设变量 x 从它的一个初值 x_1 变到终值 x_2 , 终值与初值的差 $(x_2 - x_1)$ 就叫作变量 x 的增量, 记为 Δx , 即 $\Delta x = x_2 - x_1$, 增量 Δx 可正可负.

再来看一个例子: 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的邻域内有定义, 当自变量 x 在邻域内从 x_0 变到 $x_0 + \Delta x$ 时, 函数 y 相应地从 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0 + \Delta x)$, 其对应的增量为

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

这个关系式的几何解释如图 1-4 所示.

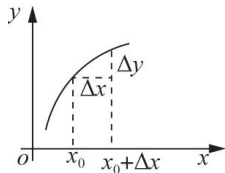


图 1-4

现在可对连续性的概念这样描述: 如果当 Δx 趋向于 0 时, 函数 y 对应的增量 Δy 也趋向于 0, 即 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, 那么就称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续.

一、函数连续性的定义

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义, 如果有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续, 且称 x_0 为函数 $y=f(x)$ 的连续点.

现在结合函数左、右极限的概念再来学习一下函数左、右连续的概念: 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a, b]$ 内有定义, 如果左极限 $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$ 存在且等于 $f(b)$, 即 $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = f(b)$, 那么就称函数 $f(x)$ 在点 b 左连续. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b)$ 内有定义, 如果右极限 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ 存在且等于 $f(a)$, 即 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$, 那么就称函数 $f(x)$ 在点 a 右连续.

一个函数在开区间 (a, b) 内每点连续, 则为在 (a, b) 连续, 若又在点 a 右连续, 点 b 左连续, 则在闭区间 $[a, b]$ 连续, 如果在整个定义域内连续, 则称为连续函数.

一个函数若在定义域内某一点左、右都连续, 则称函数在此点连续, 否则在此点不连续.

连续函数图形是一条连续而不间断的曲线.

通过上面的学习已经知道函数的连续性了, 同时可以想到: 若函数在某一点不连续, 则会出现什么情形呢?

二、函数的间断点

定义 1.5 把不满足函数连续性的点称为间断点.

它包括三种情形:

- (1) $f(x)$ 在 x_0 无定义;
- (2) $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时无极限;
- (3) $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时有极限但不等于 $f(x_0)$.

下面通过例题来介绍一下间断点的类型.

应用举例 1.7 因为正切函数 $y=\tan x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处没有定义, 所以点 $x=\frac{\pi}{2}$ 是函数 $y=\tan x$ 的间断点; 又因为 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty$, 所以称 $x=\frac{\pi}{2}$ 为函数 $y=\tan x$ 的无穷间断点; 又如函数 $y=\sin \frac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 处没有定义, 而当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数值在 -1 与 1 之间变动无限多次, 就称点 $x=0$ 为函数 $y=\sin \frac{1}{x}$ 的振荡间断点.

应用举例 1.8 函数

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, 左极限 $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = -1$, 右极限 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 1$, 可以看出函数左、右极限虽然都存在, 但不相等, 故函数在点 $x=0$ 不存在极限, 还可以发现在点 $x=0$ 时, 函数值产生

跳跃现象, 为此把这种间断点称为跳跃间断点.

上述三种间断点用几何图形表示出来, 如图 1-5 所示.

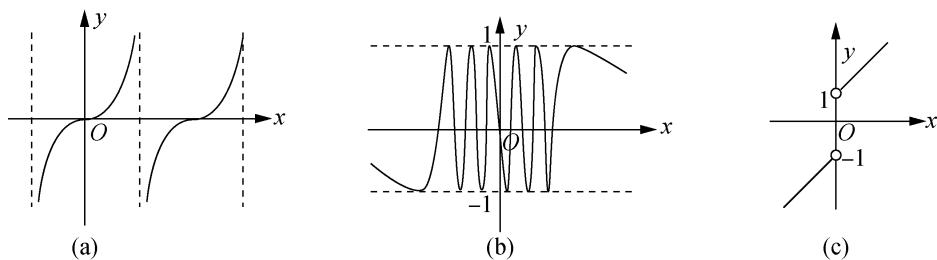


图 1-5

也可把间断点分成两类: 如果 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点, 且其左、右极限都存在, 把 x_0 称为函数 $f(x)$ 的第一类间断点; 不是第一类间断点的任何间断点, 称为第二类间断点.

若 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点, 但极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 那么 x_0 是函数 $f(x)$ 的第一类间断点. 此时函数不连续的原因是 $f(x_0)$ 不存在或者虽存在但 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$. 令 $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, 则可使函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 故这种间断点 x_0 称为可去间断点.

三、连续函数的性质及初等函数的连续性

通过函数在某点连续的定义和极限的四则运算法则, 可得出以下结论:

- (1) 有限个在某点连续的函数的和是一个在该点连续的函数;
- (2) 有限个在某点连续的函数的乘积是一个在该点连续的函数;
- (3) 两个在某点连续的函数的商是一个在该点连续的函数(分母在该点不为零).

若函数 $y=f(x)$ 在某区间上单调增(单调减)且连续, 那么它的反函数 $x=\varphi(y)$ 也在对应的区间上单调增(单调减)且连续.

应用举例 1.9 函数 $y=\sin x$ 在闭区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调增且连续, 故它的反函数 $y=\arcsin x$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 上也是单调增且连续的.

设函数 $u=\varphi(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限存在且等于 a , 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = a$, 而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=a$ 处连续, 那么复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限也存在且等于 $f(a)$, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = f(a)$.

应用举例 1.10 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(1+x)^{\frac{1}{x}} = \cos[\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}] = \cos e$

注: 函数 $y=\cos(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 可看作 $y=\cos u$ 与 $u=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 复合而成, 且函数 $y=\cos u$ 在点 $u=e$ 连续, 因此可得出上述结论.

设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 连续, 且 $\varphi(x_0)=u_0$, 而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 连续, 那么复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 也是连续的.

第八节 相关应用

应用举例 1.11 一辆宽 2 m 的货车要通过跨度为 8 m、拱高为 4 m 的单行抛物线隧道（从正中通过），为保证安全，车顶离隧道顶部至少要 0.5 m 的距离，求货车的限高．若将单行道改为双行道，即货车必须从隧道中线的右侧通过，求货车的限高．

题中已知条件有一条抛物线，要确定这条抛物线必须建立适当的坐标系．为使计算量小，可以过抛物线的对称轴建立坐标系．

解 建立如图 1-6 所示的坐标系，因为抛物线的顶点坐标是 $(0, 4)$ ，所以可设抛物线的方程为 $y = ax^2 + 4$ ．

又抛物线过点 $(4, 0)$ ，则有

$$0 = a \times 4^2 + 4 \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + 4 \quad (-4 \leq x \leq 4)$$

(1) 当 $x = 1$ 时， $y = 3.75$ ．

因此货车限高为 $3.75 \text{ m} - 0.5 \text{ m} = 3.25 \text{ m}$ ．

(2) 当 $x = 2$ 时， $y = 3$ ．

故货车限高为 $3 \text{ m} - 0.5 \text{ m} = 2.5 \text{ m}$ ．

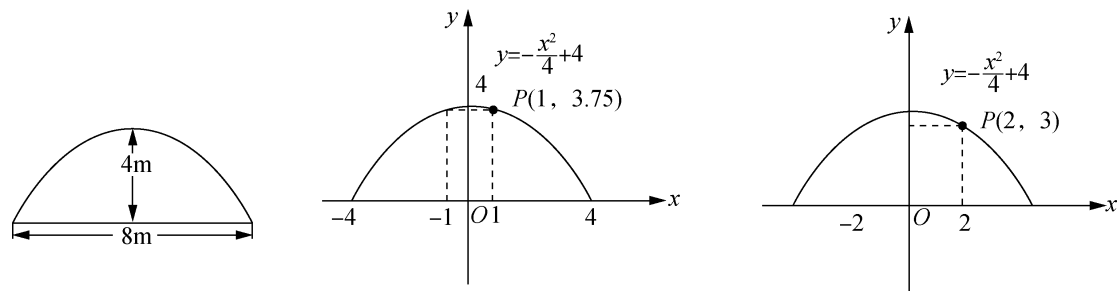


图 1-6

应用举例 1.12 一个运动员推铅球，铅球刚出手时离地面 $\frac{5}{3}$ m，铅球落地点距离铅球刚出手时相应的地面上的点 10 m，铅球运行中最高点离地面 3 m，已知铅球走过的路线是抛物线，求这个抛物线的解析式．

这是一个物理问题，由于铅球的运动路线是抛物线，因此要运用二次函数的知识去解决问题．

解 根据题意，建立直角坐标系，如图 1-7 所示．

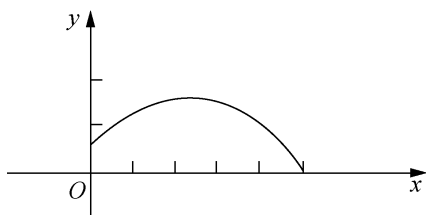


图 1-7

可知抛物线经过 $(0, \frac{5}{3})$ 和 $(10, 0)$ ，抛物线顶点的纵坐标为 3，根据题意，设抛物线的解析式为

$$y = a(x-h)^2 + 3 \quad (0 \leq x \leq 10)$$

将 $(0, \frac{5}{3})$ 和 $(10, 0)$ 代入解析式，得

$$ah^2 + 3 = \frac{5}{3} \quad (1.1)$$

$$a(10-h)^2 + 3 = 0 \quad (1.2)$$

由式(1.1)有

$$a = -\frac{4}{3h^2}$$

代入式(1.2)有

$$-\frac{4}{3h^2}(10-h)^2 + 3 = 0$$

去分母，整理得

$$h^2 + 16h - 80 = 0$$

可得

$$h_1 = -20, h_2 = 4$$

当 $h = -20$ 时， $y = a(x+20)^2 + 3$ ，抛物线顶点为 $(-20, 3)$ ，此时当 $x = -20$ 时，铅球运行中的最高点纵坐标为 3，不符合 $0 \leq x \leq 10$ 的要求，舍去。

当 $h = 4$ 时， $a = -\frac{1}{12}$ ，抛物线的解析式为

$$y = -\frac{1}{12}(x-4)^2 + 3$$

即

$$y = -\frac{1}{12}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \quad (0 \leq x \leq 10)$$

应用举例 1.13 A 市场和 B 市场分别有库存某种机器 12 台和 6 台，现决定把这种机器支援给 C 市场 10 台、D 市场 8 台，已知从 A 市场调运一台机器到 C 市场、D 市场的运费分别为 400 元和 800 元；从 B 市场调运一台机器到 C 市场、D 市场的运费分别为 300 元和 500 元。

(1) 设 B 市场运往 C 市场机器 x 台, 求总运费 W 元关于 x 的函数关系式.

(2) 若要求总运费不超过 9 000 元, 问共有几种调运方案?

(3) 求出总运费最低的调运方案, 最低运费是多少元?

本题属于规划调运问题, 根据题意可建立问题的函数模型, 讨论自变量的取值范围, 并由函数的性质, 讨论问题的最小值, 本题是函数知识的灵活运用.

解 (1) 因为 B 市场运往 C 市场机器 x 台, 所以 B 市场运往 D 市场 $(6-x)$ 台, A 市场运往 C 市场 $(10-x)$ 台, A 市场运往 D 市场 $(2+x)$ 台; 运费依次为 $300x$ 元、 $500(6-x)$ 元、 $400(10-x)$ 元、 $800(2+x)$ 元.

总运费为

$$W = 300x + 500(6-x) + 400(10-x) + 800(2+x) = 200x + 8600$$

所求函数的表达式为

$$W = 200x + 8600$$

(2) 由题意, 得 $200x + 8600 \leq 9000$, 故 $x \leq 2$.

又因为 B 市场可总共支援外地 6 台, 所以 $0 \leq x \leq 6$, 故 $0 \leq x \leq 2$, x 可取 0, 1, 2 三个数. 要求总运费不超过 9 000 元, 共有三种调运方案.

(3) 因为 $0 \leq x \leq 2$, 由一次函数性质, 得当 $x=0$ 时, W 的值最小, $W_{\text{最小值}} = 8600$.

此时的调运方案是: B 市场运至 C 市场 0 台, 运至 D 市场 6 台; A 市场运至 C 市场 10 台, 运至 D 市场 2 台. 最低总运费为 8 600 元.