

目 录

第一章 初中数学核心能力培养的理论分析	1
第一节 数学核心能力的内涵	1
第二节 初中数学核心能力培养的理论依据	15
第三节 提高学生数学核心能力的教学策略与教学设计	24
第二章 基于教学方法的初中数学教学研究	34
第一节 初中数学教学方法	34
第二节 小组合学法	38
第三节 赏识鼓励法	44
第四节 释疑解难法	46
第三章 初中数学课堂教学有效性概述	50
第一节 初中数学课堂教学有效性概念	50
第二节 影响初中数学课堂教学的因素	53
第三节 初中数学课堂教学存在的问题	58
第四节 提高初中数学课堂教学有效性的对策	63
第四章 初中数学有效性教学策略研究	75
第一节 把握初中数学的课程内容和重难点知识	75
第二节 分析初中数学的课程目标和培养方向	80

第三节 实施初中数学有效教学的浅显策略探究.....	87
第五章 初中数学探究式教学策略研究.....	90
第一节 探究式教学的内涵阐释与要素.....	90
第二节 初中数学探究式教学的价值.....	104
第三节 初中数学探究式教学的原则.....	108
第四节 初中数学探究式教学的策略.....	110
第六章 初中数学拓展性课程策略研究.....	117
第一节 拓展性课程相关知识概述.....	117
第二节 数学拓展性课程的内涵.....	124
第三节 数学拓展性课程课堂教学策略.....	130
第七章 初中数学生活化教学策略研究.....	133
第一节 基于生活化数学教学概述.....	133
第二节 初中数学生活化有效教学策略.....	141
第八章 信息技术在初中数学教学中的应用.....	145
第一节 信息技术在初中数学课堂应用的理论基础.....	145
第二节 信息技术在初中数学课堂教学中应用的分析.....	146
第三节 信息技术在初中数学课堂教学应用的融合.....	152
第九章 翻转课堂下的初中数学教学研究.....	161
第一节 翻转课堂下网络学习空间的设计与展开.....	161
第二节 翻转课堂下深度学习的设计与实施.....	170
参考文献.....	188

初中数学核心能力培养的理论分析

第一节 数学核心能力的内涵

一、核心能力的含义

（一）核心能力

教育应该教授人们一生所需的知识和技能，而人们接受教育的时间是有限的，如何在短暂的教育过程中实现这一目标，同时又能培养出高素质的人才，成为教育者们孜孜以求的目标。

近年来，国际教育的改革中出现了培养学生核心素养的研究。最初的关于核心素养的研究认为，“核心素养是指覆盖多个生活领域的，促进成功的生活和健全的社会的重要素养。”之后其他国家相继开始研究核心素养，美国提出了“21世纪技能计划”，将学生的技能分为三类：学习与创新领域，信息、媒体与技术技能领域，生活与职业技能领域。日本的核心素养研究体现在以能力为目标的教育改革中，形成了以“思考力”为核心的包括语言力、数理力、信息力和实践力的日本独具特色的核心素养理论。教育部将核心素养界定为“学生应具备的适应终身发展和社会发展需要的必备品格和关键能力”。

纵观各国对核心素养的研究可以发现，对核心素养的界定倾向于能力的培养，并且是适应未来的关键能力、核心能力。“Key Competencies”的中文翻译为“核心素养”，同时，基于研究者们将核心素养的培养归结为培养、发展学生的核心能力，核心素养的本质即为核心能力。所以，研究认为发展学生的核心素养的关键就是培养学生的核心能力。核心能力是指最重要的、最核心的能力，在所有的能力发展中处于核心地位、主导地位，是教育中重点培养的关键性能力。

（二）数学核心能力

核心素养的实现要借助学科教学，数学核心能力是数学核心素养的本质体现。数学能力的界定主要有两类。一是，心理学家认为，数学能力是个体顺利而有效地完成数学活动的个性心理特征。二是，数学教育家强调形成数学能力的数学活动特征，这一界定表明实行有效的数学活动有助于形成数学能力。尼斯（Mogens Niss）等人通过对数学能力的研究，“提出8种具有严格数学意义的数学能力成分，即数学思维、提出并解决数学问题、数学建模、数学推理、数学表征、数学符号化与形式化、数学交流、工具的使用。”他们认为，掌握数学就意味着拥有数学能力，并能在不同的数学情境下理解、判断和使用数学。数学核心能力是数学能力之中的关键性、起决定性作用的能力，它在众多数学能力中处于中心位置，是数学教育培养目标中的核心组成部分。

图尔纳（Ross Turner）认为，数学核心能力是有助于数学知识应用于实践领域的个人能力，“他提出这种个人能力包括数学交流，数学化，数学表征，数学推理与论证，数学策略性思维，使用符号、公式、技术语言等6大能力。”徐斌艳在借鉴国外数学核心能力研究的基础上，从数学活动的视角，提出了六大数学核心能力，包括数学问题提出、数学表征与变换、数学推理与论证、数学问题解决、数学交流、数学建模。

综合国内外学者对数学核心能力的界定可以发现，学者提出的数学核心能力是针对整个数学教育阶段的学生而言。因为本文主要研究的是初中阶段的数学教育，所以，从初中数学教育的特点出发，本研究认为初中阶段的数学核心能力培养是十分必要的，只有将数学核心能力得到有效的培养，才能促使学生数学素养进一步提升，更好地成长与发展。

二、数学活动本质及其数学能力

已有研究表明，数学活动基本上分为三个阶段：对经验材料的数学组织；对数学材料的逻辑组织；对数学理论的应用。这三个阶段也反映了数学学科的形成和发展途径。从教育角度看，在作为数学活动的数学教学中，教给学生的不是死记现成的材料，而是让学生自己独立地发现科学上已经发现了的东西，同时学会逻辑地去组织通过经验而得到的数学材料，最后在各种具体问题上应用数学理论知识。

（一）数学地组织经验材料

在数学教学中，学生会碰到大量的经验性材料，包括来自日常生活经验的各种情景或问题；来自其他学科领域（如物理、化学、生物、地理等）的各种对象和关系；或者是为了教学而特别准备的对象（教材、教具等），或者是需要进一步一般化和抽象化的数学

材料（数学对象）。在这一阶段，学生需要借助于观察、试验、归纳、类比、概括等手段，处理加工这些经验材料，寻找易于从数学角度理解的事实依据或信息。

例如在教学“三角形内角和是 180° ”时，可以让学生用量角器量或者裁剪等观察和试验的方法，认识数学教学内容，虽然它还不是证明，但为寻找证明方法积累了经验。在数学活动中，可以选择学生熟悉的日常经验进行讨论，例如在硕大的校园里，从教室到食堂有多条线路，我们选择哪条线路？为什么这样选择？让学生从数学角度加以交流讨论。因此在这一数学活动阶段学习数学，有助于学生形成或发展从数学角度提出问题、数学交流、数学表征、数学建模等能力。

（二）逻辑地组织数学材料

当学生在经历从数学角度组织或积累经验材料后，还需要抽象出原始概念和公理体系并在这些概念和体系的基础上演绎建立理论。理论的演绎结构是数学概念体系的一个重要特点，在教学过程中能够而且应当建立有助于向学生揭示这个特点的教学情境。

例如：正方形是含有直角的菱形，菱形是含有相等邻边的平行四边形，平行四边形是对边两两平行的四边形，四边形是含有四边形的多边形，多边形是封闭折线所围成的图形，图形是点的集合。这样从一个概念引导到另一个概念，最后引导到用来作为原始概念的“集合”和“点”这两个概念。逻辑组织还包括用演绎法来“证明”由归纳而形成的、以假设的形式叙述出来的命题。在这一活动阶段，还应该重视数学活动中归纳法的作用和一般的推理作用，包括寻求证明什么、从何证明、怎么证明等。因此，通过这样的数学教学过程，可以培养学生数学地解决问题、数学交流、数学表征、数学符号变换、数学推理论证等能力。

（三）数学理论的应用

无论现代数学有多么抽象，它的根仍然深深地扎在实践之中，从过去的土地测量和商业贸易，到现代的物理、生物、经济学等。当在科学、技术或实践活动甚至历史的某个领域中产生问题时，数学方法往往有助于这些问题的解决。而要解决这些非数学领域的问题，首先必须把它翻译成数学语言，经过翻译后问题就转化为数学问题，然后就能在严格的数学世界中解决抽象出的数学问题。这一活动阶段强调，学生通过积极的思维活动由具体内容中抽象出数学问题。而观察问题并由问题的具体内容抽象出它的数学方面的能力是通过长期练习培养并巩固起来的。这一阶段重在培养学生学会把具体情况数学化，有助于培养学生数学地解决问题、数学交流、数学逻辑推理论证、数学建模等能力。

基于上述分析，数学活动与若干数学能力密切相关，它们包括从数学角度提出问题，

数学表征与变换，数学推理与论证，数学地解决问题，数学交流，数学建模等，因此这类数学教学，将有助于学生形成和发展这 6 大核心能力。如图 1-1 所示三个数学活动阶段与数学核心能力的关系。

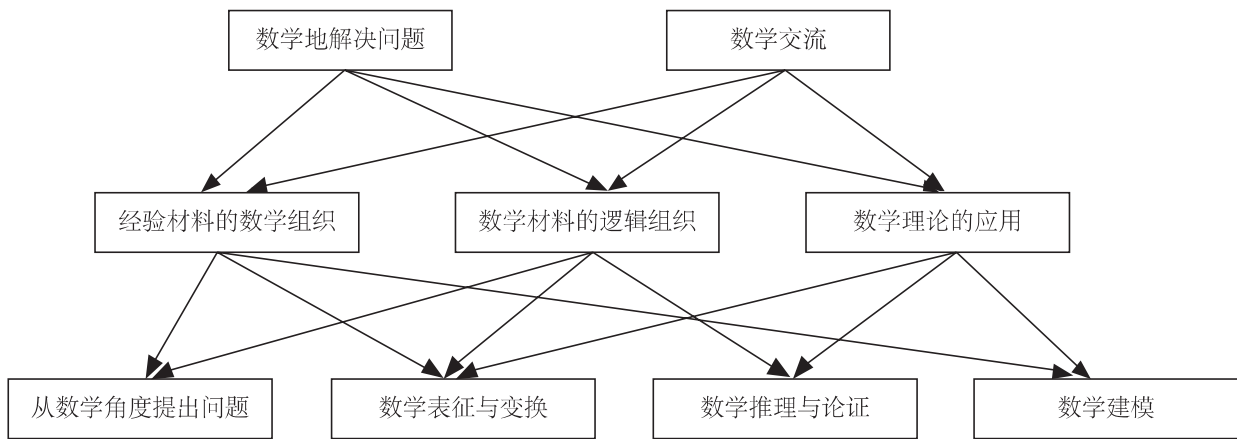


图 1-1 数学学科核心能力与数学活动关系图

三、数学学科核心能力的内涵

数学活动的本质决定着学生数学核心能力的构成，在作为数学活动的数学教学中，学生将形成并发展这些能力，下面详细分析这些能力的内涵。

（一）从数学角度提出问题

研究者们从不同视角探讨问题提出能力的内涵，并提出各自的认识或界定。如斯尔佛（Silver）从两个层面来定义问题提出：①分析、探究一个给定的情境，来产生一个新的数学问题。②在问题解决的过程中对问题进行阐述（formulation）和再阐述（reformulation）而形成一个数学问题。而且，问题提出可以发生在问题解决前、问题解决时或者问题解决后。我国台湾学者梁淑坤则将问题提出定义为：问题提出是用自己的看法想出一个数学问题。在问题提出的过程中，问题提出者会用自己的数学知识和生活经验把情境、人物、事件、数字、图形等建立关系并组织起来，提出一个数学问题。

基于上述分析，本研究将“从数学角度提出问题的能力”界定为：基于某情境或问题产生自己新的数学问题，或者在问题解决过程中或解决后产生新的子问题，并用数学语言表述出这些生成的、创造的、独立的新数学问题。

（二）数学表征与变换

数学表征与变换是各国数学教育改革中最受关注的核心能力之一。从相关研究上看，数学表征是指用某种形式表达数学概念或关系的过程。数学表征有助于学生理解概念、关系或关联以及解决问题过程所使用的数学知识。学习者若要理解某个数学问题，就必须在这个数学问题与一个更易理解的数学问题之间建立一个映射，而表征就是这个映射过程。对照已有的研究成果，我们将数学表征能力界定为：用某种形式，例如书面符号、图形（表）、情景、操作性模型、文字（包括口头文字）等，表达要学习的或处理的数学概念或关系，以便最终解决问题。

数学变换是指在数学问题解决过程中，保持数学问题的某些不变性质，改变信息形态，将要解决的问题进行数学化，使之达到由繁到简，由未知到已知，由陌生到熟悉的目的。因此数学变换能力是指：为了使得问题能够简化或成功解决会使用改变信息形态的某种数学转化策略。

（三）数学推理与论证

推理是数学的基本思维方式，也是人们学习和生活中经常使用的思维方式。数学推理则是指人们在数学观念系统作用下，由若干数学条件，结合一定的数学知识、方法，对数学对象形成某种判断的思维操作过程。作为一类推理，它有其自身的特点：首先，数学推理的对象既不是生活中的常识，也不是社会现象，而是表示数量关系和空间形式的数学符号；其次，在某一个思考过程中，数学推理较之一般推理更是环环相扣连贯进行，并且，推理的依据主要来自问题所在数学系统。数学高度的抽象性和逻辑的严谨性使得数学推理相对具有一定的难度。

论证离不开推理，在论证过程中，之所以能够根据已知判断的真确认另一判断的真或假，正是因为已知判断和所要论证其真或假的判断之间建立必然的逻辑联系，而后者则是从前者通过推理形式推出来的，所以说论证过程必须应用一个或一系列的推理。基于上述分析，“数学推理论证能力”的具体内涵为：通过对数学对象（数学概念、关系、性质、规则、命题等）进行逻辑性思考（观察、实验、归纳、类比、演绎），从而做出推论，再进一步寻求证据、给出证明或举出反例说明所给出推论的合理性的综合能力。

（四）数学建模

数学建模经常与数学应用归在一起，但两者着重点不同，建模着重建立真实世界与数学世界之间的可逆联系，关注抽象出数学问题与解决现实问题的过程。由于数学建模不是线性过程，需要不断地从数学世界返回真实世界中检验结果，完善模型。研究者布鲁

姆(Blum)提出数学建模是一个非线性的循环过程,它由7个步骤组成:①理解现实问题情境;②简化或结构化现实情景,形成现实模型;③将被结构化的现实模型翻译为数学问题,形成数学模型;④用数学方法解决所提出的数学问题,获得数学解答;⑤根据具体的现实情景解读并检验数学解答,获得现实结果;⑥检验现实结果的有效性;⑦反馈给现实情景。因此,数学建模能力表现为:面对某个综合性情景,能够理解并建构现实情境模型,会将该模型翻译为数学问题,建立数学模型,然后会用数学方法解决所提数学问题,再根据具体的情境,解读与检验数学解答,并验证模型的合理性。

(五) 数学地解决问题

作为数学活动过程中重要的能力——数学地解决问题的能力,目前没有统一的界定。例如美国NCTM在2000年颁布的标准中将数学地解决问题描述为:通过解决问题掌握新的数学知识,解决在数学及其他情境中出现的问题,采用各种恰当的策略解决问题,能检验和反思数学问题解决的过程。德国在2003年颁布的数学课程标准中对数学地解决问题界定为:拥有适当的数学策略去发现解决问题的思路或方法并加以反思。我国数学教育一直非常重视数学地解决问题的能力,2011颁布的《义务教育数学课程标准》(以下简称《课标》)对数学地解决问题做了较为详细的说明,强调通过数学课程学习初中学生应获得数学问题解决能力。通过上述分析,本研究将数学地解决问题界定为:采用各种恰当的数学知识、方法与策略,解决在数学或其他情境中出现的问题,并能检验与反思数学问题解决的过程。

(六) 数学交流

重视数学交流能力的培养是现代社会发展对数学教育的要求。目前世界许多国家在其数学课程标准中明确提出了培养学生的数学交流能力的要求。如英国国家课程在“关键概念”板块中指出“有效地数学交流能力”是三大能力之一,要求学生能理解和解释以多种形式呈现的数学,并以最合适的方式有信心地交流数学。国际经济合作与发展组织(OECD)主持的国际学生评价项目(PISA)也将数学交流能力作为数学能力评估框架中的一种,且将其描述为“伴随交流过程的数学读写能力”。我国2011版义务教育阶段数学课程标准也明确要求学生能与他人交流各自解决问题的算法和过程,并能表达自己的想法等。不仅各国数学课程标准等文本对数学交流能力做出说明,而且亦有丰硕的研究成果为我们认识数学交流能力提供参考。综上所述,本研究将数学交流能力界定为:能不同程度地以阅读、倾听等方式识别、理解、领会数学思想和数学事实,并能以写作、讲解等方式解释自己的问题解决方法、过程和结果,针对他人的数学思想和数学事实做出分析和评价。

综上分析，我们获得由 6 大能力成分构成的数学核心能力模型及其内涵，现汇总在表 1-1 中。

表 1-1 数学学科核心能力内涵

数学学科核心能力内涵	
核心能力成分	核心能力内涵
从数学角度提出问题	基于某情境或问题会产生自己新的数学问题，或者在问题解决过程中或解决后产生新的子问题，并用数学语言表述出这些生成的、创造的、独立的新数学问题。
数学表征与变换	用某种形式，例如书面符号、图形（表）、情景、操作性模型、文字（包括口头文字）等，表达要学习的或处理的数学概念或关系，以便最终解决问题。为了使得问题能够简化或成功解决会使用改变信息形态的某种数学转化策略。
数学推理与论证	通过对数学对象（数学概念、关系、性质、规则、命题等）进行逻辑性思考（观察、实验、归纳、类比、演绎），从而做出推论，再进一步寻求证据、给出证明或举出反例说明所给出推论的合理性的综合能力。
数学建模	面对某个综合性情景，能够理解并建构现实情境模型，会将该模型翻译为数学问题，建立数学模型，然后用数学方法解决所提数学问题，再根据具体的情境，解读与检验数学解答，并验证模型的合理性。
数学地解决问题	采用各种恰当的数学知识、方法与策略，解决在数学或其他情境中出现的问题，能检验与反思数学问题解决的过程。
数学交流	能不同程度地以阅读、倾听等方式识别、理解、领会数学思想和数学事实；并能以写作、讲解等方式解释自己的问题解决方法、过程和结果，针对他人的数学思想和数学事实做出分析和评价。

四、数学核心能力的主要维度

（一）数学表征与变换能力

数学是一门高度抽象的学科，而初中生的思维具有形象性，因而初中数学的教学需要选择合适的数学表征形式帮助学生学习数学。学生的学习需要借助教师对知识的不同表征进行理解，在这个过程中，学生不仅能深刻理解数学知识，也学会了不同的表征方法。在解决数学问题的过程中，要想达到对数学问题的不同表征，需要转换视野，从不同的角度对问题进行表征，进而达到多样化表征的目标。

1. 数学表征的内涵和分类

20 世纪 70 年代以来，表征问题受到数学教育者们广泛的关注。“表征”一词最初源于认知心理学，“指信息在心理活动中的表现和记载的方式”，也称为心理表征。后来逐渐引入到教育领域中，教育学上的表征是指知识在学习者头脑中的呈现和表达方式，是基于已有知识经验的自主建构过程。从这里可以看出，表征是一种认知活动，即学习者在大脑中如何建构、组合、表示当前所学知识的过程。同时，表征也是认知活动的结果，即知识或信息储存在大脑中的形式。所以，从这个意义上来说，表征是过程与结果的统一。

从已有数学表征方面的研究看，“数学表征是指用某种形式表达数学概念或关系的过

程。”若要达到对数学问题的深刻理解，就需要学习者能在这个数学问题中出现的结构与另一个更易理解的数学问题结构之间建立映射，数学表征就是两个问题之间的映射过程。数学表征对数学学习具有重要作用，学生通过表征数学对象，可以获得对数学知识的深刻理解，提高学习的效率。数学表征也影响数学问题的解决，对问题的正确表征是解决数学问题的关键。关于数学表征的分类主要有以下三种：

第一，数学表征最常见的一种分类是认知心理学角度的分类，分为外部表征和内部表征。外部表征将问题的信息以文字表征、符号表征、图形表征和操作表征等形式呈现，可以实现问题解决者对问题信息的充分理解。内部表征反映了问题的思考过程在个体头脑中的呈现，外在表现为学习者能够通过自己的语言将问题的条件与目标描述出来。在问题解决的过程中，外部表征和内部表征通常是相互关联的，外部表征反映了学习者对数学对象的内部建构和思维过程，内部表征则指导学习者的知识呈现方式。

第二，根据表征方式的抽象性，数学表征可分为形象表征和抽象表征。形象表征包括以操作材料、图画模式以及出声言语和书面符号等形式出现的表征方式；抽象表征以一种比较抽象的方式进行表征，包括用概念、定理、命题等方式表征数学问题，它主要是用符号或代号表征数学问题，因而也被称为命题表征。形象表征有助于减少记忆负荷、提高贮存能力，抽象表征有助于了解问题解决的实质和关键，并通过与形象表征各种方式的结合达到解决问题的目的。初中生的思维具有具体形象性的特点，但数学是一门抽象的学科，对数学的理解需要借助形象化的表征；同时，借助抽象表征可以促进学生对数学问题本质的理解，两者共同构成了完整的表征系统。

第三，视觉—空间表征是一种视觉化的表征，本质是图像符号，主要是运用图像对被表征的对象进行形象化的描绘。视觉—空间表征又分为图片表征和图示表征。图片表征则是对问题的外在表达进行表征，在表征问题时通常从视觉的角度出发，构建生动的、细微的视觉图像。这在初中低年级使用的较多，是一种主要的也是最佳的表征方式。图示表征是对问题中的平面或空间关系的表征，包括对问题的空间关系和空间转化进行表征。图示表征的使用与学生的空间能力、抽象思维能力发展密切相关，由于高年级的学生抽象逻辑思维开始萌芽，因而这种表征方式往往在高年级开始起作用。

2. 数学表征能力

数学表征既与数学学习密切相关，又影响数学问题的解决，因而培养学生的数学表征能力是数学教育的重要目标。徐斌艳将数学表征能力界定为：“用某种形式，例如书面符号、图形（表）、情景、操作性模型、文字（包括口头文字）等，表达要学习的或处理的数学概念或关系，以便最终解决问题。”数学表征能力具体表现为：在特定的情境下能识别、解释出现的知识，并能根据实际情况和目的选择、转换不同的表征形式解决数学问题。数学表征能力的高低一定程度上反映了学生对数学的认知层次，它的发展是数学能

力评价的重要参考。著名的学生能力国际评价项目 PISA，在 2000 年到 2012 年的测评中，数学表征能力一直是其中的一项重要指标。2000 年 4 月，全美数学教师理事会 NCTM 出版了《学校数学教育的原则和标准》，标准将表征能力与问题解决能力、交流能力、联系能力、推理与证明能力并列为五大核心数学能力。由此看出数学表征能力已经成为数学教育重点培养的能力之一。

3. 数学变换的内涵和分类

数学变换是数学思考的一种方法，包括两种类型：不同数学结构之间的变换和同一结构内的变换。不同数学结构之间的变换是指“将一个数学对象从一个数学结构中变换到另一个数学结构中，这种变换的本质是映射。”同一结构内的变换是指为了得到问题结论，对问题进行变形和转化。综合来看，数学变换是在研究和解决问题时，依据数学法则和逻辑规则将问题变换使之转化，而数学问题解决的过程就是在保持一定不变关系下的“变换”过程。研究解题的著名学者波利亚在他的著作《怎样解题》中，特别强调了数学解题过程中问题变换的重要性。他在阐述“怎样解题表”时，反复论述找一个与要求问题相关的、类似的问题，即将未解决的问题转化为已经解决的问题，从而解决当前的问题。他在启发人们不断变换问题的同时，还给出了一些建议：“把原问题变换为与它等价的新问题，建议你去思考一个可能有关的问题等。”

由波利亚对数学解题的建议可知，数学变换是解决数学问题的一种基本方法，对数学问题的适当变换是解题的关键。数学变换的方法在各阶段的数学学习中都会运用到，初中阶段的数学涉及的数学变换主要有三类：“代数变换、几何变换和数形变换。”代数变换，包括恒等变换（如方程）、同解变换、公式变换、顺序变换、同余变换等，这里的代数变换涉及数与代数领域和图形与几何领域，如恒等变换主要指数与代数领域的方程，公式变换主要指图形与几何领域的面积、体积的计算。几何变换，主要是指图形与几何领域的变换，包括刚体变换（如平移、旋转、对称）、等积变换（如形变面积不变、形变体积不变）等。数形变换，主要指数与形之间的变换，包括几何代数化的解析几何（如正比例、反比例函数）、图文变换、数形联想、图表变换、图式变换等。数学是表示数量关系和空间形式的科学，代数变换、几何变换和数形变换沟通了数学中的数与形，实现了数形之间的互相转化。

数学问题的解决需要对问题进行适当变换，如何对问题进行恰当的变化是解题的中心环节。初中数学问题的恰当变换需要遵循联想类比、熟悉化、简单化三个基本原则。联想类比原则是指，在解决问题的过程中，遇到的问题如果使用常规解法比较困难，可以联想认知系统内的相似结构，从而把问题转化为该系统内的知识求解。这就是波利亚在解题的“拟定方案”中所建议的“尽量想出一道你所熟悉的具有相同或相似未知量的题目”、熟悉化原则指将陌生的、不熟悉的问题转化为熟悉的问题求解，从而利用已有的知识经验

解决陌生的问题。简单化原则要求将复杂的、不易解决的问题，转换为一个或几个简单的问题，通过解决简单问题完成复杂问题的解决。按照这三个原则可以达到对问题恰当变换的目的，从而高效解决问题。

4. 数学变换能力

基于对数学变换的认识，数学变换能力是指“为了使得问题能够简化或成功解决会使用改变信息形态的某种数学转化策略。”数学变换能力要求对数学问题能够进行不同结构之间的转换和同一结构之间的转化，这就要求学生要沟通数学知识和数学方法之间的联系，使新学习的内容和原有的数学认知结构建立联系，从而促进学生形成有意义的数学学习。将数学问题进行不同变换的过程，有利于引导学生发散思维，转换思想与理念，学会从不同角度分析和思考问题，在发展学生思维的探究能力、提高解决问题能力的同时，也有助于学生体会多样化的数学，增加学习数学的兴趣。因此，培养初中生的数学变换能力，是初中数学教育的重要目标，也是初中数学学科实施核心能力培养的一个重要方面。

数学表征与数学变换能力是相互包含、密切联系的统一体。“数学表征能力表现为在具体特定的情境下能够识别、解释以特定表征形式出现的知识，并能够根据具体情况和目的去应用、选择、转换各种不同形式的表征用于数学问题的解决。”在对问题进行不同形式表征的过程中，包含了数学转化能力的运用，即在表征系统间转化和表征系统内转化。数学变换能力表现为对数学问题从不同角度分析，恰当转换问题，变换的最终形式表现为对问题的不同表征，这里包含了数学表征能力的应用。因而，对数学问题的分析、解答，同时包括了数学表征能力和数学变换能力的运用。

（二）数学推理能力

1. 数学推理的内涵

推理是由一个或几个已知判断，推导出未知结论的思维过程。从定义可以看出，推理包括前提、结论以及两者之间起桥梁作用的推理形式。前提是推理所依据的已知判断，表现为已知的事实或假设；结论是由已知判断推出的新判断；推理形式是连接前提和结论之间的和使推理得以发生的一种模式或框架，属于逻辑学的研究内容。从这个意义上来说，推理是一种形式逻辑，通过推理可以从已知知识得到未知知识，特别是一些不能通过感觉经验直接获得的知识。

数学上的推理不同于逻辑学意义上的推理，逻辑学意义上的推理是纯粹的逻辑推理，主要是为了训练严谨的思维，表现为纯演绎的逻辑推理。数学上的推理依附于数学知识内容，需要运用数学运算、数学公式定理等数学的基础知识，分析和推断相应的数学问题，通常表现为由已知数学命题推出新的数学命题的思维过程。因而，数学推理是指“在数学

观念系统作用下，根据给定的若干数学条件，结合数学知识、方法，对数学对象形成某种判断的思维操作过程。”从定义来看，数学推理有其自身的特点：数学推理的对象是表现为数量关系和空间形式的数学问题，推理的依据是与问题相关的数学知识，中间的推理过程是环环相扣、紧密联系的。由于数学推理是对数学符号进行推理，符号的抽象性和数学自身的严谨性，使得数学推理具有一定的难度。

2. 数学推理的分类

数学推理的分类形式多样，依据不同的分类标准，数学推理可以划分为不同的种类。按照推理过程的思维方向划分，主要有归纳推理、类比推理和演绎推理。归纳推理是由特殊到一般的推理，即由一系列特殊的知识前提推出一个一般性的结论。在这之中，依据所概括的事物或对象是否完全，归纳推理又可以分为完全归纳推理和不完全归纳推理。两者都是根据某类事物具有某种属性，推出这类事物都具有该种属性，不同的是完全归纳考察的是某类事物中的每一对象都具有某种属性，不完全归纳只是根据某类事物的部分对象具有某种属性来推测整体。不完全归纳推理包括简单枚举推理和科学归纳推理。简单枚举推理一般借事物外部的、表面之间的联系得出结论，属于归纳推理的初级形式，表现为主要通过大量的特例发现和检验结论。科学归纳推理依据“某类事物中的部分对象与其属性之间的必然联系，推出该类事物的全部对象都具有该属性。”简单枚举推理和科学归纳推理是初中阶段数学归纳推理的基本形式，简单枚举推理是根据对象外部的具体联系进行推论，与初中生的具体形象思维特征相符，是贯穿初中全过程的主要推理形式。

类比推理是由特殊到特殊的推理，它是根据两个或两类对象的某些属性都相同或相似，进而推出它们在其他属性上也具有相同或相似的特征。类比推理是以两个对象之间的相同或相似为基础，从而推出事物的未知属性的过程。演绎推理是由一般到特殊的推理，它是由普遍性的前提推出特殊性结论的推理，演绎推理最常见的形式是三段论推理，包括大前提、小前提和结论。在大前提成立的情况下，小前提属于大前提中的特殊对象，因而得到结论成立。演绎推理中，由于普遍性前提是必然成立的，所以得到的结论也是必然成立的。

归纳推理和类比推理共同构成了合情推理，合情推理和演绎推理是密切联系的，在数学推理的过程中扮演着重要角色。通过合情推理中的归纳推理和类比推理，可以获得猜测、提出猜想，从而发现数学规律。数学是一门严谨的学科，对发现的规律要进行验证，而演绎推理就是用来确认、证明命题为真。因此，在数学的发展过程中，合情推理和演绎推理是相辅相成、缺一不可的。

3. 数学推理能力

推理能力是运用合乎形式的正确推理进行思维的一种重要能力，是学生思维能力发

展的重要组成部分。作为数学课程标准中的十大核心概念之一，推理能力的发展是数学思维发展的重要标志，是数学教育需要培养的核心能力之一。《课标》明确指出：“推理能力的发展应贯穿于整个数学学习过程中。”这意味着推理能力的培养应贯穿于数与代数、图形与几何、统计与概率、综合与实践四大领域的学习内容之中。其不仅对推理能力作了课程内容方面的明确规定，还对推理能力的教学提出了建议。

根据推理的内涵、分类和课标中对推理能力的分析，本研究认为数学推理能力是指，在数学活动中，依据数学概念、公式、法则等数学知识，对数学对象，如数学概念、关系、性质、规则、命题等，通过观察、实验、归纳、类比、演绎的方式进行逻辑性思考，从而做出推论的能力。数学推理能力贯穿于数学教育始终，根据我国心理学界对初中学生推理特点开展的调查研究，初中生的数学推理能力主要分为三种：归纳推理能力、演绎推理能力和类比推理能力。

（三）数学交流能力

1. 数学交流的内涵和分类

1988年美国数学教师理事会（NCTM）制订了《美国学校数学课程标准与评价标准》，首次将数学交流作为学校数学教育目标提出。文件明确将数学内容分为“解决问题、数学交流、数学推理和数学联系”，详细制订了各年级数学交流的教学要求及评价标准，强调“为数学交流而学习”，把“学会数学交流”作为数学素养培养的重要部分。广义的数学交流是探索数学和应用数学解决问题的一种动态过程。本研究中的“数学交流”是指狭义的数学交流，即数学课堂教学过程中的数学交流。具体来说，“数学交流是指在数学教学与学习中，运用数学语言、数学思想方法，以听、说、读、写等方式接受和表达主体对数学知识包括概念、关系、规律、应用等的认识、感受及体验的一种活动。”初中生的数学交流是指在数学学习和课堂教学活动过程中，能初步运用简约、准确的数学语言进行数学交流，理解文本，表达自己的想法。

依据不同的分类标准，数学交流可以分为不同的种类。按照交流内容的不同，数学交流可以分为知识的交流、体验的交流和解决问题的交流。数学知识的交流，指“学生以口头或书面的方式把自己对某一数学知识（概念、法则、定理、公式、方法等）的理解向他人表述，并试图去理解别人的观点。”通过数学知识的交流，可以加深学生对数学知识的理解。数学体验的交流，是一种情感式交流，主要表现为对数学学习过程中的感受、情绪、认识、观点等认知、情感的体验，包括学生自身对某一现象的概括性认知过程、对他人或自己学习过程及结果的评论和对学习活动的喜欢程度等。解决问题的交流是数学思想方法的交流，“指学习者思考问题、整理思路的基础上，选择适当的数学语言，采用合适

的表述方式，将解决问题的思路、解法和结果，或者困惑与障碍予以表述过程。”

数学交流在数学课堂学习活动中的体现，主要有三种组织形式：主讲式、讨论式和实践探究式。主讲式的数学交流是以群体中的一员为主体，其他交流者紧紧围绕这一主体进行沟通与交流。传统教学中多是教师为主体的主讲式交流，新课标提倡学生的学习主体地位，因而应该将交流的主体交给学生。讨论式的数学交流，是对数学问题的交流探讨，包括全班学生讨论、小组内讨论以及学生之间自发组成的讨论。这里学生是讨论的主体，教师可以在参与讨论的过程中，了解学生知识的掌握情况，积极引导学生的讨论并给予必要的反馈。实践探究式的数学交流，以学生与教材或明确的数学材料之间的交流为主，是学生在对数学知识的学习探究过程中，通过实验、调查、询问等形式，在问题探究过程中伴随的数学交流。在实际教学过程中，数学交流的组织形式应是灵活多样的，教师可以根据教学内容和学生的实际情况选取一种或几种不同的形式交替使用、组织数学交流。

2. 数学交流能力的界定

“数学交流”教育目标的实现依托于数学交流能力的培养，许多国家在提出了“数学交流”的培养目标之后，很快在其数学课程标准中明确提出了培养学生数学交流能力的目标。数学交流能力是现代社会发展对数学教育提出的要求，被英国人称之为“数学的基本能力”，是现代化社会必须具备的基本能力。“数学交流能力是指接受、理解并表达数学事实和数学思想的能力。”具体来说，数学交流能力是指学生通过阅读、倾听等方式理解数学文本、接受数学意义，并能以讲解、书面写作等方式表达自己的数学思考过程和解决问题方法，以及对他人的数学思想和数学事实做出分析和评判的能力。从定义中可以看出，数学交流能力的主体是学生，交流的内容主要是数学知识，包括数学事实和数学思想方法等。数学交流能力包括对文本的理解和对数学的书面或口头表达，表现为接受与表达的过程，即接受、理解数学文本信息，并将所理解的信息显性化。初中生的数学交流能力也包括接受与表达两个过程，它是指在初中数学的教学活动中，学生通过听、读、看等形式接受他人的数学信息，包括数学知识、数学方法及数学思想，并对其进行主动选择和组织，从而纳入自我认知体系，然后将自己理解的数学信息以语言、符号等形式表达出来的能力。

（四）数学问题解决能力

1. 数学问题

问题是数学的心脏，是数学研究的核心要素。关于问题，尚无统一的定义。借用波利亚的观点，问题是学习者有意识地寻求一种适当的行为，以便达到被清楚地意识到但不能立即达到的目的。数学问题是人们在数学活动中面临的、不能用现成的数学经验和方法

直接求得解决的困难情境。从信息加工的角度来看，数学问题是认知主体对任务领域的理解而构成的问题空间。问题空间由起始状态、目标状态和障碍构成，起始状态是一组已知的问题条件的描述，目标状态是问题要求的答案，障碍是由已知达到目标状态的中间过程。依据问题空间的构成可以得到，数学问题主要由三种成分组成：条件信息、目标信息和运算信息。条件信息是问题中已知的和给定的东西，表现为数据、关系或者说明的情境状态，它是问题解决的前提和依据。目标信息一般指数学问题本身要求的信息，解决问题的过程即是逼近目标状态的过程，对于复杂的问题可能需要解题者根据要求的问题发现或提出新的问题以促进最后问题的解决。运算信息，这里的“运算”是指为达到目标状态允许对条件所采取的行动，它是由问题的初始状态达到目标状态的中间环节，需要进行一定的思维活动，是问题求解的依据。

2. 数学问题解决

“问题解决”一词首先由美国提出，认为问题解决既是数学课程的目标，也是数学教学的关键，是所有数学活动和课程的核心。著名国际学生评价项目 PISA 一直将问题解决作为评价的重点，认为问题解决是每个国家的核心教育目标。我国当前的数学课程标准将“问题解决”作为四大课程目标之一，明确要求发展学生的发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力。问题解决已经成为当前数学教育的一项重要培养目标。数学问题解决，强调学生应用已有的数学知识和方法程序，解决数学中的问题。从前面对问题空间的界定来看，数学问题解决即是从已知状态到达目标状态的过程。也就是在问题目标的引导下，学生运用已有的数学知识经验对面临的问题采用一定的策略和方法，以到达目标状态的活动过程。

3. 初中数学问题解决能力

问题解决已经成为数学教育的重要目标，培养学生的数学问题解决能力也已成为当前教育的重点。数学问题解决能力是学生面对数学学习过程中的问题情境时，能够运用自己掌握的数学知识经验顺利地解决数学问题的能力。对数学问题的正确解决一方面可以体现学生解决问题的能力，同时也可以判断学生对数学知识与思想方法的掌握情况。PISA 认为数学问题解决能力主要包括五种能力：识别已知条件和信息的能力、提出可能的解决方法 and 方案的能力、实施方案的能力、交流解决结果的能力和反思的能力。这五种能力体现了一个完整的数学问题解决过程所需要的能力，表现为一种综合性能力。

初中数学问题解决能力是初中生需要具备的关键能力，是指初中生能够灵活地运用自身的数学知识和方法策略解决数学问题的能力，是一种综合性数学能力。数学课程标准明确提出了发展学生的“四能”，即增强发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力。初中生的数学问题解决能力，依据波利亚提出的问题解决四个阶段“弄清问题、拟定计划、

实现计划、回顾与反思”，问题解决的过程包含六种能力：理解问题情境的能力、分析问题的能力、选择策略的能力、实施方案的能力、协作交流的能力、评价反思的能力。理解问题情境的能力是解题的第一步，即弄清问题，首先要识别问题的特征，理解以文字、图形、表格等形式出现的信息和条件，还要分辨题目中信息的特定含义，认识条件和变量之间的关系，做出初步判断。分析问题的能力，即提出可能的解决办法和方案的过程，这个过程需要学生联系已有的知识，寻找解决问题需要的新联系，从而达到解决问题的目的。寻找解决方法的过程通常需要学生对与问题有关的相关知识进行梳理、归类总结，明确采用什么样的规则组合来解决当前问题。一般包括明确知识归属问题，对已有的方法进行分析，并判断其优缺点的过程，对数学问题适当的表征与变换有利于问题的解决。选择策略的能力，是选择已经拥有的解决问题的策略以解决当前问题的能力。策略的选择建立在学生对条件和信息的分析、理解的基础上，学生解决问题的策略可能不止一种，这时就存在一个最佳策略的问题，最佳策略是在学生不断地尝试、对策略筛选的基础上发现的。分析问题的能力和选择策略的能力是“拟定计划”的表现，“实现计划”主要体现在实施方案的能力。实施方案即将解决问题的方案付诸实践的过程，学生找到了解决问题的方法，还需要选择合适的方式用数学语言呈现在书面上。问题解决之后的交流与反思是对整个解决问题过程的回顾，必不可少。协作交流的能力体现在整个数学问题解决的过程中，包括理解同伴表达的意义和顺利向同伴表达自己的想法，在交流的过程中既发展了学生的数学语言表达能力，也加深了对数学知识的理解。评价反思的能力，包括对数学结果的检验与评价和对解决问题过程的回顾与反思，合理的评价与反思是推动学生解决数学问题的动力。

四个核心能力是相互影响、密切相关的，存在于学生解决数学问题的整个过程中。解决问题的初始阶段需要对题目中的已知条件分析，这个过程中对数学问题的合理表征与变换推动了问题解决的进程。将问题表征与变换之后，对出现的新问题需要进行适当的推理，可以促进问题的解决。整个问题解决的过程，以师生交流、学生互相交流的形式进行。形成解决方案之后需要将方案付诸实践，并回顾反思整个解题过程，这是学生数学问题解决能力的体现。总之，数学表征与变换能力、数学推理能力、数学交流能力和数学问题解决能力相互联系，贯穿于整个问题解决的过程。

第二节 初中数学核心能力培养的理论依据

数学教育作为教育学下的具体学科教学论，其研究规律必然遵循教育学一般原理，由于数学学科的特殊性，一般教育理论不可能对数学问题解决、数学思维培养等数学独有

的研究内容涉及过细，这时数学教育教学的开展就需要有针对性更强的具体的数学教育理论支撑。鉴于数学思维是数学素养生成的前提，而学生的思维有着区别于成人独特的发展特点，故对于初中数学核心能力培养研究不能离开对生理学、心理学理论关于思维发展的研究。

一、初中数学核心能力培养的生理学理论

但凡科学研究都要有科学基础，并且遵循科学原理，初中生数学核心能力的研究也不能例外。数学能力培养的科学基础是脑科学研究。脑科学认为：注意、感知、记忆、思维、想象等心理过程都是大脑的机能，脑是心理的器官，所有心理活动都产生于脑，离开脑这一物质基础，任何心理现象都不会发生。一个 12 岁儿童的大脑在重量和容量上都达到成人的 95%，脑细胞间神经纤维的发育也接近完成。与此相应，儿童的心理水平也随之提高：从感觉阶段发展到表象阶段，从形象思维阶段发展到抽象思维阶段，从外部控制发展到自我内部控制。

进一步对神经系统发育情况的研究表明：儿童到 6 岁时，神经纤维的分支加深加长，各个细胞之间的联系也更加广泛。这时大脑半球的一切传导通路几乎都已经髓鞘化，身体在接受外界的各种刺激后，可以迅速、准确地沿着神经通路，传导到大脑皮层的高级中枢，大脑皮层间增加了暂时联系的可能性。此时儿童大脑皮层各区接近成年人的水平，它的成熟顺序是：枕叶→颞叶→顶叶→额叶。此时儿童对外来刺激的反应比较灵敏和准确，运动比较有规律，有意识的学习思维活动比较活跃，大脑皮层之间频繁出现各种复杂的暂时联系，能形成比较稳定和巩固的条件反射。因此这个时期是儿童智力发展的重要阶段。儿童在 7-8 岁期间，神经细胞体积增大，细胞分化基本完成，细胞之间的轴突和树突间的联系更加密集，出现了许多新的神经通路，颞叶发育接近成人，额叶比较成熟，大脑皮层的抑制能力和分析综合能力加强，这个时期的儿童已经能够对语言文字形成条件反射，但是第二信号系统活动能力还不完善，表现在学习上对直观、形象的事物容易接受，模仿能力较强，但进行抽象、概括、思维的能力则较差。9-16 岁的少年，大脑的重量没有大的变化，但大脑皮层的内部结构和功能进一步复杂化，神经联络纤维的数量增多，联络神经元的结构和功能以及皮层细胞的结构和功能都在迅速地发展，为它们进行联想、推理、概括、归纳等思维活动奠定了物质基础，从而使第二信号系统机能进一步发展，思维活动能力逐渐提高。

现在神经生理学的研究揭开了思维是脑的机能的面纱。美国生理学家斯佩里(R.W.Sperry)对裂脑人(由于患有某种疾病，因此不得不切断了其头脑中联系两个半球的神经联系)进行的一系列实验研究，揭示了大脑两半球功能的不对称性和右半球的许多高

级功能。研究表明,大脑两半球基本上是以不同的方式进行思维,左脑倾向于用词语进行思维,右脑则倾向于感觉形象的直接思维。大脑两半球具有一种合作关系,即左脑负责语言和逻辑思维,而右脑则负责一些难以用语言表达的工作。

以上脑科学研究表明,初中阶段儿童已经具备了思维训练的物质基础,教师要紧紧抓住这个作为思维发展的重要时期,及时开展观察、比较、分析、综合、想象、概括、推理等思维训练,会加速数学核心能力的形成。

二、初中数学核心能力培养的认知发展阶段心理学理论

数学教育的核心问题是学生学习过程的优化,即怎样使学生主动地、有效地、合理地学习需要的数学,学习过程是一个心理活动过程,心理学的进步必然导致数学教学的改革。瑞士儿童心理学专家皮亚杰(Jean Piaget)是认知发展(发生认识论)领域最有影响的一位心理学家,他采用临床方法,从结构整体理论出发,对儿童进行整体的观察和研究,创立了完整的结构主义,提出了儿童认知发展动力说,其主要观点集中在《儿童的语言和思维》(1923)、《儿童心理学》(1966)、《教育科学与儿童心理学》(1935)著作中。皮亚杰认为,儿童认知发展表现为一种内部结构的变化,儿童通过这一内部结构与外部环境相互作用来认识客观世界。早在20世纪20年代起,皮亚杰用弗洛伊德的“临床法”研究儿童,提出了认知发展的四个阶段。他认为人类的智力发展是以时间次序有序进行,顺序不可更改。对每个个体来说,智力的发展又是随着每个特有的遗传特征和环境特点而改变的。皮亚杰的认知发展四个阶段是指:感知运动阶段(从出生到大约2岁);前运算阶段(约2-7岁);具体运算阶段(约7-12岁);形式运算阶段(约11-15岁)。

婴儿期0岁到2岁是感觉运动阶段,属于直观行动思维(感知动作思维)水平。这一阶段儿童的特点是只有动作活动而缺乏思维活动。儿童主要以感觉和动作为依托来认识周围世界,还不能对主体与客体做出分化,如果感觉和动作运动停止了,他的认识也就停止。幼儿期2岁到7岁是前运算阶段,主要是具体形象思维水平。儿童在这个阶段常常以自我为中心,他们所进行的推理是从一个具体情况到另一个具体情况的,不能同时考虑一个对象或者一种情况的两个方面,思维是单向的,不可逆的。这个阶段快结束时,能对相信的事物给出理由,能按照一种具体特征给物体分类,并获得一些具体概念。

学龄初期7岁到12岁是具体运算阶段,这种运算思维一般还离不开具体事物的支持,离开具体事物而进行纯粹形式逻辑推理会感到困难;这些运算仍是零散的,还不能组成一个结构的整体,一个完整的系统。这一阶段的特点是守恒性和群集运算,是形象抽象思维水平。这阶段儿童的认知结构中已有了抽象的概念,能借助于具体表象进行推理,此时思维的主要特征表现为:一是思维的多维性。多维思维是指能同时考虑同一对象的不同特

征，从多种角度对事物进行归类。二是思维的可逆性和守恒性（如数量守恒）。三是具体的逻辑推理。

少年期 12 岁到 15 岁是形式运算阶段，即具体运算思维在经过不断同化、顺应和平衡，在旧的具体运算结构的基础上初步出现新的运算结构。所谓形式运算，就是可以在头脑中将形式和内容分开，可以离开具体事物，根据假设来进行的逻辑推演的思维。在这个年龄段，青少年已经能运用某些形式运算结构来解决所面临的逻辑课题，诸如组合、包含、比例、排除、概率、因素分析等，是经验型为主的抽象逻辑思维水平。达到这一阶段，青少年不需要依赖于具体运算来描述或说明智力的抽象作用。他们能同时考虑许多观点，客观看待自己的活动，对思维过程做出反应。形式运算阶段的学生能系统地阐述理论，提出假设和检验假设；能弄清定义、法则和定律的来龙去脉；会用归纳、演绎等方法推理论证；理解复杂的概念（如排列、组合、概率等）；想象无穷大和无穷小，与成人的思维接近。

因此在初中阶段开展数学思维方法的训练，有助于促进学生掌握正确的思维方法，提高数学核心能力，为初中阶段经验性为主的逻辑思维和初中阶段理论性为主的抽象逻辑思维形成打下基础。中国心理学家朱智贤认为初中儿童思维的基本特点是从以具体形象性的思维为主要形式逐步过渡到以抽象逻辑思维为主要形式。但这种抽象逻辑思维在很大程度上，仍然是直接与感性经验相联系的，仍然具有很大程度的具体形象性。这个论断与皮亚杰的具体运算观点具有一致性。

以上皮亚杰认知发展阶段心理学理论的启示是：儿童的学习和认识是与成人不同的，这种不同不是简单的表现为他们的学习和认识比成人的程度低，比常人的方法简单，而是表现为他们的学习和认识往往采用与成人完全不同的方式，这种区别是带有本质性的，即儿童并不是微型的成人，而是有着自己独特性的个体。这是心理学对教育学的最重要的贡献。

三、初中数学核心能力培养的自然教育理论

脑科学是心理学研究的生理基础，心理学又使教育学成为一门科学。纵观西方教育思想史，教育就表现出一以贯之的自然教育的思想。早在古希腊时期，苏格拉底认为教育的目的就是发展人的自然禀赋，著名的“苏格拉底方法”亦称“产婆术”因人因事而异对人施教，他用讨论问题的问答方法与人谈话，但不直接把结论告诉他，而是指出问题并引导人最后得出正确的结论，它包括讥讽（不断提问题使对方陷入矛盾最终承认直接的无知）、助产（帮助对方得到问题的正确答案）、归纳（从各种具体事物中找到事物的共性和本质）、定义（个别事物归入一般概念）四个步骤，其中最大的特点是受教育者依据苏格

拉底提出的问题并依靠自己已经掌握的知识进行独立思考，最终获得知识、发现真理。这种从个别中、从表象中、从经验中得到普遍的东西，得到确定性概念的归纳方法，教会了人逻辑的思考，成为自然教育思想的源头。由于苏格拉底方法有助于启发学生的思维发展，因而被后世教育家继承和发展，逐渐形成“启发式教学”。

随之的亚里士多德第一次提出并论证了教育必须适应人的自然发展的原则。他把新生一代从出生到 21 岁的教育按照年龄划分为三个时期，每一时期根据人的年龄特点施行不同的教育。在文艺复兴时期，亚里士多德关于人的和谐发展的思想给人文主义教育家很大的启迪，他关于教育要适应自然发展的思想，开创了西方教育思想史上“教育遵循自然”理论的先河。

古罗马时期的雄辩家和教育家昆体良在总结自己长期的教学工作经验基础上，提出了精辟的教育见解。他主张教学要“适度”，教师所传授的知识的分量与深度要适应儿童的天性，符合他们的接受能力。他举例说：“正如紧口瓶子不能容受一下子大量涌入的液体，却能为慢慢地一滴滴地灌进的液体所填满，所以我们也必须仔细考察学生的接受能力”。此外他建议改进教学方法，主张用赞许和表扬以及激励学生进步的方法教学。

在文艺复兴时期的人文主义教育思想家中，伊拉斯谟（Desiderius Erasmus）可能是最先认识到以自然和自发的能动性作为基础和最为有效的教育方法的价值。他强调“我们不能低估年轻人有能力以自己的才智找到合适的答案，……和其他任何生物一样，孩子都擅长真正属于他本性的活动，……因此，要按大自然的规律办事”。他指出，有些人根本不考虑孩子的年龄，总想让他们一下子变成大人。他们总爱以自己的能力去衡量和要求孩子幼小的智能。为此他提出了教育的三条基本原则：其一，中庸之道原则（鼓励与纪律相结合，耐心理性与严厉相结合）；其二，了解儿童，因材施教原则；其三，早期教育原则。人文主义教育思想在西方教育发展中占有重要地位，近代西方教育理论就形成和发展于人文主义教育思想。

17 世纪捷克教育家夸美纽斯（Johann Amos Comenius）的泛智教育思想基于两个基础：“泛智论”和“教育适应自然”。在《大教学论》中，他说：“我们的格言应当是：凡事都要跟随自然的教导，要按观察能力的发展层次，要使我们的方法依据这种顺序的原则”。他认为，教育要在各方面适应自然，他所说的“自然”包含两方面的含义：一是指自然界及其普遍法则；二是指人的与生俱来的天性。对于后者，夸美纽斯强调教育要根据人的天性，适合人的年龄特征，使每一个人的智力都能得到充分的发展。他说：“我们不必从外面去拿什么东西给一个人，我们只需要他的原有的、藏在身内的东西显露出来，并去注意每个个别的因素就够了”。他提出了三条教学原则，一是便易性原则：教学应该适合学生的心灵，使之容易而且快意。二是教学的彻底性原则：教学应该教有意义的重要的功课，并使学生能够记住曾读到、听到和他们的心灵曾欣赏过的一切事物，随时可以应用。三是

教学的简明性与迅速性原则：教学应该消除阻碍和延误，直接奔向预定的目标。夸美纽斯提倡泛智的教学方法，即以儿童发展和学习规律为基础，把一切事物的一切知识教给一切人的方法，是使教师可以少教但学生可以多学的方法。他的教育思想为近代西方教育理论建立了基本的框架，皮亚杰“教与学对应的原理”就源自夸美纽斯“教育适应自然”思想。

作为18世纪自然教育思想代表的法国教育家卢梭（Jean-Jacques Rousseau）强调“教育效法自然”，认为人的自然本性是自由的，人必须遵循自然法则，正确运用自己的自由；人的另一个特点是理性，只有在“顺应自然”的教育下，人的理性才得到发展。因此教育要以自然的教育为中心，使事物的教育和人的教育服从于人的教育，使三方面圆满地相配合并趋于自然的目标，才能使儿童受到良好的教育。卢梭的自然教育是新旧教育的分水岭，在教育史上具有划时代意义，它第一次把教育的对象——儿童提到了教育中心的地位，他提倡教育要服从自然的永恒法则，要遵循儿童的自然发展顺序，符合儿童的天性发展，根据儿童的发展阶段实施教育。卢梭强调：“大自然希望儿童在成人之前就要像儿童的样子……儿童是有他特有的看法、想法和感情的；如果想用我们的看法、想法和感情去代替他们的看法、想法和感情，那简直是最愚蠢的事情”。这一观点为本文倡导的尊重学生的思维规律进行初中数学学习的观点奠定了理论基础。

18世纪后期瑞士教育家裴斯泰洛齐（Johan Heinrich Pestalozzi）在1780年出版的《一位隐士的夜晚时刻》概括了他的“教育必须顺乎自然”的理论。他坚信人性具有无穷的应变能力；人的道德修养和知识造诣由他自己负责，而教育则应发展人的天才，使他能够独立思考问题。在西方教育史上，裴斯泰洛齐第一次明确提出教育心理化的思想。他发表的《方法》一文中说：“笔者试图将人类的教学过程心理化。”在他看来，只有使教学过程与儿童心理的自然发展相一致，才能使儿童的天性和能力得到和谐的发展。他的“教育心理学化”比夸美纽斯的“教育要适应自然”与卢梭的“教育要顺应自然”思想前进了一大步，他认为人的天赋能力及其发展是教育的基础，教育的任务就在于发展人的基本能力。教育要为儿童的天赋能力和充分发展提供条件，并通过激发内部兴趣、提供练习和促进思考等来推动这些能力的发展。教育应该与儿童心理发展的规律协调一致，从各学科最基本的“要素”开始讲起，使儿童获得身体、智力和道德发展的自主性，也就是说，“智力和才能的发展要有一个适合人类本性的、心理学的、循序渐进的方法”。

19世纪初德国教育家赫尔巴特（Johann Friedrich Herbart）努力把教育学建立在心理学基础上，使教育学从经验层面上升到科学高度，真正成为一门科学。反映其教育思想的代表作《普通教育学》则被公认为第一部具有科学体系的教育学著作。他认为人的心理活动需要经过两个阶段，即“专心”（钻研）和“审思”（理解），教学的基础是多方面的兴趣，兴趣贯穿于整个教学过程。他把教学过程划分为四个阶段：清楚（明了），在心理状态上是要求集中注意；→联合（联想），在心理状态上表现为期待；→系统，与此相适应

的心理状态是探究；→方法，与此相适应的心理状态是行动，因此揭示了教学过程的基本规律。

与此同时期的德国国民教育之父第斯多惠（Friedrich Adolf Wilhelm Diesterweg）提出全人类教育思想的基本原则——自然适应性原则：教育必须适应自然地进行教学，必须严格按照人的天性及其发展规律，适应儿童年龄特征和个别差异，把心理学作为教育科学的基础。他强调说：“不信任人的天性，就不可能有适应自然的、成功的教育。”他认为教学的任务不仅仅是用各种知识充实学生的头脑，而且要发展他们的智力和才能。在《德国教师教育指南》中，他从学生、社会条件、教材和教师四方面提出一系列教学原则，认为教学的主体是学生，学生身心发展的特点是制定教学原则的主要依据，而且他把激发学生主动性的教学方法放在首要地位。

20 世纪前半期实用主义教育思想代表人物杜威（John Dewey）提倡“做中学”，认为“儿童是起点，是中心，而且是目的”，他强调学校的教学应该能唤起儿童的思维，有助于培养他们的思维习惯和能力。他认为具体的思维过程可以分成五个步骤：一是疑难的情境。二是确定疑难的所在，并从疑难中提出问题。三是通过观察和其他心智活动以及收集事实材料，提出解决问题的种种假设。四是推断哪一种假设能够解决问题。五是通过实验，验证或修改假设。它被后人称为“思维五步”，其顺序不固定。杜威指出，儿童只有处于直接的经验的情境，亲身考虑问题的种种条件，寻求解决问题的方法，才能称之为真正地思维。从“思维五步”出发，杜威提出了教学过程相应的“教学五步”，对教师进行思维培养提出了针对性建议，影响很大。杜威的思想在 20 世纪前半半个世纪的整个时期里统治了教育舞台。

纵观自然教育的发生发展历史，我们感叹于历史上教育学家们前仆后继的努力。从宏观的教育遵循自然、适应人的天性到清晰化地描述适应学生的思维发展规律，再到具体的关于儿童思维发展规律的科学分析和具体实施的教育原则、教学建议，我们得到：初中数学核心能力教学既然是致力于发展学生的终身发展，就应尊重学生的思维发展规律，按照不同年龄学生身心发展的特点，设计教学各环节，寻找适应的教学策略，教师的教学表达宜与学生思维的发展同步，教导大多数学生的思考过程，发展学生的思维能力。

四、初中数学核心能力培养的“再创造”数学教育原理

荷兰数学教育家弗赖登塔尔（Freudenthal）早在二十世纪三四十年代就以出色的拓扑学和李代数等数学专业研究受到世人瞩目，他在 50 岁后对数学教育的倾力研究更让他享誉世界。弗赖登塔尔倡导数学教育研究要像数学研究一样，以科学论文形式提交，使数学教育研究不再停留在经验交流水平；他倡议召开了第一届国际数学教育大会，创办了《数

学教育研究》杂志，推动了数学教育的专业化进程；他的教育理论集中在《作为教育任务的数学》《除草与播种——数学教育学的序言》和《数学结构的教学法现象学》三本书中，此外《数学教育再探——在中国的讲学》同样影响深远。弗赖登塔尔的数学教育思想基于他对数学的认识而产生，不是简单的“教育学+数学例子”数学教育研究模式，而是抓住数学教育的特征，紧扣数学教育的特殊过程，抽象概括成他独有的教育理论。弗赖登塔尔尤其关注儿童的数学学习，因此他的教育理论对本研究针对性极强。

（一）核心观点

弗莱登塔尔所倡导的数学教育可以用三个词来加以概括——现实、数学化、再创造。

1. 数学现实（Realistic mathematics）

“数学源于现实，也必须属于现实，并且用于现实”，这是弗莱登塔尔思想的基本出发点。数学是系统化了的常识，这些常识是可靠的，不像某些物理现象会把人引入歧途。而常识并不等于数学，常识要成为数学，它必须经过提炼和组织，而凝聚成一定的法则，这些法则在高一层里又成为常识，再一次被提炼、组织，……如此不断地螺旋上升，以至于无穷。这就是我们今天所说的抽象与逐级抽象，亦即数学的发展过程具有层次性。

2. 数学化（Mathematization）

弗莱登塔尔认为数学化就是数学的组织现实世界的过程。即人们在观察认识和改造客观世界的过程中，运用数学的思想和方法来分析和研究客观世界的种种现象并加以整理和组织，以发现其规律的过程。一般来讲，数学化的对象：一是数学本身，二是现实客观事物。它包括数学符号、各种观点、概念以及它的运算方法和规则等。

3. 再创造（Recreation）

学生应该在学习数学的过程中，根据自己的体验，用自己的思维方式，重新创造有关的数学知识。通过自身活动所得到的知识与能力是一种乐趣，理解得透彻，掌握得快，还可以保持长久的记忆。因而通过“再创造”来进行学习就能引起学生的兴趣，从而使学生学习具有动力。

（二）特征

1. 高站位，从哲学视角看待数学教育

弗赖登塔尔在《作为教育任务的数学》序言中指出：“本书虽然也研究了许多细节，但它肯定是一本数学教育哲学的书。”因为真正的教育活动意味着遵循自己的真诚信念去探索正确的教育途径，而教育科学首先是对这种真诚信念的合理性做出论证，所以可以把

它称为哲学。由于弗赖登塔尔“现实的数学”这一观点正是数学的“经验性”哲学观的基本观点，从而从哲学的角度俯视数学教育，跳出了具体的数学教学方法策略的范畴，这样使得观点具有了哲学层面的方法论含义，对从事数学教育具体工作的人有醍醐灌顶的作用，促进其进入数学研究的新境界。

2. 展个性，从学习者视角看待数学学习

弗赖登塔尔认为：数学的起点是现实的数学，数学学习有若干层级，因人而异。数学学习就是个人不断反思自己的活动，改变看问题的角度的“数学化”过程，“用数学的方法把实际材料组织起来”便是弗赖登塔尔所说的“数学化”。弗氏尤其强调数学学习过程中的数学化，用他本人的话说：“与其让学生学习数学，不如让学生学习数学化”。

3. 重活动，从体验者视角看待数学学习方法

弗赖登塔尔强调“再创造”是数学学习的唯一正确方法，只有经过自己的再创造获得的知识才能被真正掌握。数学是人的一种活动，所以要经历从现实的数学出发做数学的过程，而不能像数学家表述自己研究成果时往往把结果作为出发点那样，成了“教学法的颠倒”，掩盖了思维的本来过程。数学现实要经历提炼为数学规则才能内化为学生的数学知识结构过程，这个过程需要学生通过自己的努力获得，决不能硬生生地灌输。

弗赖登塔尔的教育思想由于多以儿童作为研究对象，成为针对性极强的初中数学研究的重要教育理论基础。正确把握“现实的数学+再创造”教育思想，有利于我们更好地进行初中数学核心能力培养研究。

五、初中数学核心能力培养的理论支撑框架

依据生理学理论，我们发现 6-12 岁儿童的大脑发育基本完成，具备了思维训练的物质基础。运用皮亚杰心理学理论，我们知道初中阶段属于认知发展阶段的具体运算阶段。这时儿童的思维是具体形象思维向抽象逻辑思维过渡时期，把握好契机将促成学生思维发展的飞跃，加速数学能力的形成。

古往今来的教育学家们一直在摸索对人的教育的规律，苏格拉底的“产婆术”启发法促进了人逻辑的思考，开创了自然教育思想的源头；亚里士多德第一次提出并论证了教育必须适应人的自然发展的原则，开创了西方教育思想史上“教育遵循自然”理论的先河；昆体良主张教学要“适度”，教师所传授的知识的分量与深度要适应儿童的天性；伊拉斯谟最先认识到以自然和自发的能动性作为基础和最为有效的教育方法的价值；17 世纪捷克大教育家夸美纽斯强调“教育适应自然”，提出了三条相应的教学原则；卢梭第一次把教